

تأثیر تنش‌های سطحی روی ارتعاشات خطی غیر محلی نانو لوله سه جداره‌ی نیتريد بور حاوی جریان سیال ویسکوز بر بستر الاستیک با استفاده از DQM

مهدي محمدی مهر^{۱*}، امير عباس فارسی^۲، رضا اسلامی فارساني^۳، پدرام دشتی گوهری^۴ و محسن یوسفی رامندی^۴

اطلاعات مقاله	چکیده
<p>واژگان کلیدی: تأثیر تنش‌های سطحی، تحلیل ارتعاشات خطی، نانو لوله سه جداره نیتريد بور، تیر اویلر-برنولی غیر محلی، روش مربع سازی دیفرانسیلی.</p>	<p>در این مقاله تأثیر تنش‌های سطحی روی ارتعاشات خطی غیر محلی نانو لوله سه جداره‌ی نیتريد بور حاوی جریان سیال ویسکوز بر بستر الاستیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این تحقیق، از مدل تیر اویلر - برنولی برای تحلیل ارتعاشات آزاد نانو لوله سه جداره و بکارگیری تئوری الاستیسیته غیر محلی برای شرایط مرزی دو سرگیردار تحت بارگذاری‌های الکترو ترمو مکانیکی استفاده می‌شود. سپس انرژی جنبشی سیال و نانو لوله، انرژی کرنشی، کار خارجی ناشی از نیروهای واندروالس و بستر الاستیک بدست می‌آید. با استفاده از روش انرژی و اعمال اصل هامیلتون، معادلات حرکت نانو لوله سه جداره نیتريد بور تحت تأثیر تنش‌های سطحی محاسبه می‌شود. برای حل عددی معادلات از روش مربع سازی دیفرانسیلی استفاده شده است. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که فرکانس طبیعی بدون بعد با افزایش سرعت سیال کاهش می‌یابد. همچنین هنگامیکه فرکانس طبیعی بدون بعد برابر صفر شود، در این حالت، پدیده کمانش اتفاق افتاده و سیستم واگرا می‌شود. در نتیجه نانو لوله نیتريد بور سه جداره پایداری خود را از دست می‌دهد. همانطور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود محدوده پایداری با افزایش ضخامت و نسبت طول به قطر ناشی از تنش‌های سطحی افزایش می‌یابد. نتایج این پژوهش می‌تواند برای اندازه‌گیری مشخصات ارتعاشی نانو لوله حاوی جریان سیال و طراحی ابزارهای نانو سیال برای تشخیص قند خون مفید باشد.</p>

۱- مقدمه

در حال حاضر علم نانو و نانو تکنولوژی به سرعت در حال گسترش می‌باشد. سازه‌های با مقیاس نانو مانند نانو تیرها،

نانو صفحه‌ها، نانو لوله‌ها و نانو ذرات کاربرد زیادی در نانو سیستم‌ها و نانو ابزارها دارند. نانو لوله‌ها با خواص مکانیکی، الکتریکی و فیزیکی در کاربردهای الکترونیکی با بیشترین اقبال روبه‌رو شده و همچنین برای نگهداری هیدروژن و هیدروکربن‌ها جهت استفاده در پیل‌های سوختی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند. معروفترین نانو لوله‌ها، نانو لوله‌های کربنی و نیتريد بور می‌باشند. از نظر ساختاری، کربن و نیتريد بور هم‌الکترون

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: mmohammadimehr@kashanu.ac.ir

۱. استادیار گروه مکانیک جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان.
۲. دانش آموخته کارشناسی ارشد گروه مکانیک، دانشکده تحصیلات تکمیلی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب
۳. استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
۴. دانش آموخته کارشناسی ارشد گروه مکانیک جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان

می‌باشند. ساختارهایی که نیتريد بور تشکیل می‌دهد همانند کربن به صورت دو بعدی (شبه گرافیت) و سه بعدی (شبه الماس) است. بنابراین این ماده نیز همانند کربن می‌تواند به صورت نانو لوله در آید. یکی از خصوصیات نانو لوله‌های نیتريد بور نیمه‌رسانا بودن آن است و در کاربردهای الکترونیکی بهتر از نانو لوله‌های کربنی عمل می‌نماید. نانولوله‌های نیتريد بور دارای خواص مکانیکی، حرارتی و پیزوالکتریکی خوبی بوده و به همین دلیل کاربردهای فراوانی در نانو الکترونیک، نانو مکاترونیک، نانو عملگرها، نانو حسگرها، نانو روبات‌ها و نانو کامپوزیت‌های هوشمند دارند.

مدل الاستیسیته غیرمحلی در سال ۱۹۸۳ بوسیله ارینگن ارائه شد [۱]. مطابق با نظریه ارینگن، تنش در یک نقطه به کرنش در سایر نقاط وابسته می‌باشد، لذا در این حالت نمی‌توان از معادلات محلی استفاده نمود زیرا نیروهای بین اتمی و اثر مقیاس کوچک طول در معادلات ظاهر می‌گردد. قربان پور و همکارانش [۲] ارتعاشات غیرخطی و ناپایداری غیر محلی میکرو لوله کامپوزیتی هوشمند تقویت شده با نانو لوله نیتريد بور حاوی جریان سیال بر بستر الاستیک تحت بارگذاری الکترو ترمو مکانیکی را بررسی نمودند. آنها نتیجه گرفتند که پایداری سیستم کاملاً به پتانسیل الکتریکی و درصد حجمی نانو لوله نیتريد بور وابسته است. وانگ و همکارانش [۳] ارتعاشات آزاد مدل‌های میکرو و نانو تیر را با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن برای تئوری تیر تیموشنکو بررسی نموده و معادلات حاکم و شرایط مرزی را با استفاده از اصل هامیلتون استخراج و این معادلات تحلیلی را برای فرکانس‌های ارتعاشی تیرها با شرایط مرزی مختلف تحلیل نمودند.

محمدی‌مهر و رحمتی [۴] در مقاله خود ارتعاشات محوری غیرمحلی الکترو ترمو مکانیکی نانو میله نیتريد بور تک جداره تحت اثر الکتریکی را بررسی نموده و معادله ساختاری نانو میله تحت بارگذاری الکترو ترمو مکانیکی را با استفاده از اثر مقیاس کوچک بدست آوردند.

آنها اثرات ضریب شکل، شرایط مرزی دو سرگردار و یکسرگردار- یکسرآزاد و مقیاس کوچک را روی فرکانس طبیعی بررسی کردند. همچنین اثرات تغییر ضریب ثابت پیزوالکتریک، تحریک الکتریکی، دو شرط مرزی و درجه حرارت را روی جابجایی محوری نانو لوله تک جداره نیتريد بور مورد مطالعه قرار داده و مشاهده کردند که با افزایش ضریب ثابت پیزوالکتریک و درجه حرارت، جابجایی محوری نانو میله تک جداره افزایش یافته و با افزایش اثر مقیاس کوچک فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. ردی [۵] خمش، کماتش و ارتعاشات تیر را با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی تحلیل نموده و جواب‌های متوجه را برای بار کماتش بحرانی، خیز و فرکانس طبیعی بررسی نموده و در نهایت اثر مقیاس کوچک طول را روی پارامترهای مذکور مورد مطالعه قرار دادند. محمدی‌مهر و همکارانش [۶] بار کماتش پیچشی بحرانی نانو لوله‌های کربنی دو جداره بر بستر الاستیک وینکلر-پاسترناک را با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی تحت تأثیر اثر مقیاس کوچک طول بررسی نمودند. نتایج آنها نشان می‌دهد که ثابت برشی پاسترناک، بار کماتشی بحرانی غیرمحلی را افزایش داده و اختلاف بین حضور و عدم حضور ثابت برشی پاسترناک زیاد است. همچنین آنها نتیجه گرفتند که بار کماتش بحرانی غیرمحلی کمتر از بار کماتش برشی بحرانی محلی است. خدای و همکارانش [۷] ناپایداری و ارتعاشات غیرمحلی نانو لوله‌ی دو جداره نیتريد- بور حاوی سیال ویسکوز در محیط الاستیک را بر پایه تئوری غیرمحلی پیزوالاستیسیته و مدل تیر اویلر- برنولی بررسی نمودند. نتایج حاصله نشان می‌دهد که پارامتر اثر مقیاس کوچک، محیط الاستیک، تغییر دما و پتانسیل الکتریکی اثر قابل توجهی بر روی فرکانس طبیعی بی بعد و سرعت بحرانی سیال دارد.

در مقیاس میکرو و نانو، تاثیرات سطح سبب تغییرات مهم در خصوصیات فیزیکی، مکانیکی و الکتریکی ماده می‌شود. لذا از این اثر در مقیاس نانو نمی‌توان صرف‌نظر نمود. وانگ [۸] کماتش نانو لوله حاوی جریان سیال داخلی با در نظر

پاسترناک محاسبه می‌شود. سپس با استفاده از روش انرژی و اعمال اصل هامیلتون، معادلات حرکت نانو لوله سه جداره نیتريد بور تحت تاثیر تنش‌های سطحی بدست می‌آید.

۲- معادلات حاکم بر حرکت نانو لوله نیتريد بور سه جداره حاوی جریان سیال ویسکوز

برای بدست آوردن معادلات حاکم بر حرکت نانو لوله ابتدا باید معادلات متشکله نانو لوله نیتريد بور، روابط سینماتیک و نیروهای ناشی از بستر الاستیک و واندروالس را بدست آورده، سپس با جایگذاری این روابط در انرژی پتانسیل کل و به کارگیری روش انرژی و اصل هامیلتون، معادلات حاکم بر مساله را بدست آورد.

۲-۱- معادلات متشکله نانو لوله نیتريد بور

رابطه تنش- کرنش غیرمحلّی برای مواد پیزوالکتریک در مقیاس نانو تحت بارگذاریهای الکتریکی، حرارتی و مکانیکی به صورت زیر بیان می‌شود [۱ و ۱۲]:

$$(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} - [h]^T \{E\} - \{\lambda\} T \quad (1)$$

که $\{\sigma\}$ تانسور تنش کلاسیک، $\{\varepsilon\}$ تانسور کرنش و $\{E\}$ تانسور میدان الکتریکی و T تغییرات دما می‌باشد. همچنین $[C]$ ماتریس ثابت سختی الاستیک، $[h]$ ماتریس ثابت پیزوالکتریک و $\{\lambda\}$ ماتریس ثابت تنش- دما بوده و $e_0 a$ ضریب پارامتر غیرمحلّی ارینگن است.

محورهای x و z به ترتیب درجهت طول و ضخامت تیر می‌باشند و محور z روی تار خنثی اندازه‌گیری می‌شود.

برای تئوری تیر اویلر برنولی که فقط تنش در راستای محوری وجود دارد، رابطه تنش - کرنش در رابطه (۱)

گرفتن دو لایه سطحی بر اساس تئوری الاستیسیته غیر خطی ارینگن را مورد مطالعه قرار دادند. آنها تاثیر تنشهای سطحی، طول و ضخامت تیر، اثر مقیاس کوچک و شرایط مرزی دو سرگردار و دو سر تکیه‌گاه ساده را روی بار کمانش بحرانی مورد بررسی قرار داد. قشلاقی و هاشمی نژاد [۹] تاثیر تنش‌های سطحی را روی ارتعاشات آزاد غیرخطی نانوتیرها با استفاده از تئوری تیر اویلر برنولی بررسی نمودند. وانگ [۱۰] مدل تحلیلی برای پیش بینی تاثیر تنش‌های سطحی بر روی ارتعاشات آزاد غیرمحلّی نانو لوله حاوی جریان را مطالعه نمود. وی در این مدل، تاثیر تنش‌های سطحی هر دو لایه داخلی و خارجی را روی فرکانس‌های طبیعی نانو لوله بررسی نمود. نتایج نشان می‌دهد که تاثیرات سطح با در نظر گرفتن محیط الاستیک یا تنش‌های سطحی پسماند، سبب افزایش فرکانس طبیعی و سرعت جریان بحرانی می‌شود. برای نانو لوله‌های با ضخامت کم یا ضریب شکل بزرگ، به طور قابل توجهی پایداری نانو لوله‌ها ناشی از تاثیر تنش سطحی افزایش می‌یابد. صمدی و فرشیدیان فر [۱۱] ارتعاشات آزاد نانو لوله کربنی حاوی سیال ویسکوز را با استفاده از مدل تیر تیموشنکو غیر محلّی مورد بررسی قرار داده و فرکانس طبیعی نانو لوله را با استفاده از روش گالرکین بدست آوردند. هدف اصلی مقاله آنها، تاثیر ویسکوزیته سیال بر روی فرکانس طبیعی اصلی و محاسبه سرعت سیال بحرانی نانو لوله می‌باشد. همچنین آنها تاثیر سرعت بحرانی نانو لوله، اثر مقیاس کوچک، ضریب شکل و شرایط مرزی مختلف را روی فرکانس طبیعی بررسی نمودند.

در این تحقیق، تاثیر تنش‌های سطحی روی ارتعاشات خطی غیر محلّی نانو لوله سه جداره‌ی نیتريد بور حاوی جریان سیال ویسکوز بر بستر الاستیک پاسترناک بررسی می‌شود. از مدل تیر اویلر برنولی برای تحلیل ارتعاشات آزاد نانو لوله نیتريد بور با استفاده از تئوری الاستیسیته غیر محلّی تحت بارگذاریهای الکترو ترمو مکانیکی استفاده می‌شود. انرژی جنبشی سیال و نانو لوله، انرژی کرنشی، کار خارجی ناشی از نیروهای واندروالس و بستر الاستیک

۲-۲- روابط سینماتیک نانو لوله نیتريد بور

میدان جابجایی بر اساس تیر اویلر- برنولی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۱۳].

$$\begin{aligned}\bar{U}(x, z, t) &= u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \\ \bar{V}(x, z, t) &= 0 \\ \bar{W}(x, z, t) &= w(x, t)\end{aligned}\quad (7)$$

که \bar{U} جابجایی طولی، \bar{V} جابجایی جانبی و \bar{W} جابجایی عرضی تیر و $u(x, t)$ و $w(x, t)$ به ترتیب خیز محوری و عرضی تیر اویلر برنولی در سطح میانی می‌باشد.

روابط کرنش-جابجایی (روابط سینماتیک) با استفاده از رابطه (۷) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, z) &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_z(x, z) &= 0 \\ \gamma_{xz}(x, z) &= 0\end{aligned}\quad (8)$$

که ε_x کرنش محوری تیر است.

۲-۳- نیروهای ناشی از بستر الاستیک و واندروالس

در این قسمت، نیروهای ناشی از بستر الاستیک و واندروالس محاسبه می‌شود تا بتوان در قسمت بعد کار ناشی از نیروهای خارجی را بدست آورد. اثر محیط الاستیک در لایه خارجی با استفاده از مدل پاسترناک به صورت زیر فرض می‌شود [۶]:

$$F_{Elastic\ medium} = -K_w w + G_p \nabla^2 w \quad (9)$$

که K_w ثابت فنری نوع وینکلر و G_p ثابت برشی نوع پاسترناک است.

شکل (۱) شماتیکی از نانو لوله سه جداره نیتريد بور حاوی سیال ویسکوز بر بستر الاستیک را نشان می‌دهد.

برای مواد پیزوالکتریک تحت بارهای الکترو ترمو مکانیکی به صورت زیر ساده می‌شود:

$$(1 - (e_0 a)^2 \frac{d^2}{dx^2}) \sigma_x = E (\varepsilon_x - \alpha_x T) - h_{11} E_x \quad (2)$$

که h_{11} ضریب پیزوالکتریک، E_x میدان الکتریکی، α_x ضریب انبساط حرارتی، E ضریب کشسانی می‌باشند. ε_x و σ_x به ترتیب تنش و کرنش محوری تیر هستند. رابطه جابجایی الکتریکی بر پایه تئوری پیزوالکتریک به شرح ذیل است:

$$D_x = h_{11} (\varepsilon_x - \alpha_x T) + \epsilon_{11} E_x \quad (3)$$

که ϵ_{11} ثابت دی الکتریک و D_x جابجایی الکتریکی هستند.

میدان الکتریکی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (4)$$

که φ پتانسیل الکتریکی می‌باشد.

رابطه تنش سطحی بر حسب کرنش با در نظر گرفتن اثر مقیاس کوچک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_x^S - (e_0 a)^2 \frac{d^2}{dx^2} \sigma_x^S = E^S \varepsilon_x + \tau^S \quad (5)$$

که E^S ، τ^S و σ_x^S به ترتیب ضریب کشسانی سطحی، کشش سطحی باقیمانده و تنش محوری سطحی می‌باشند. تنش محوری کل نانو لوله با استفاده از روابط (۲) و (۵) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sigma_x^T = \sigma_x + \sigma_x^S \quad (6)$$

۲-۴- روش انرژی و بکارگیری اصل هامیلتون

در این مقاله، معادلات حاکم بر نانو لوله نیتريد بور سه جداره با استفاده از روش انرژی و به کارگیری اصل هامیلتون بدست می‌آید که برای محاسبه انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار ناشی از نیروهای خارجی از روابط بدست آمده در قسمت‌های ۲-۱ تا ۳-۲ (روابط (۱) تا (۱۲)) استفاده می‌شود. انرژی پتانسیل کل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Pi = K - (U + V) \quad (13)$$

که Π انرژی پتانسیل کل، K انرژی جنبشی، U انرژی کرنشی و V کار ناشی از نیروهای خارجی می‌باشند.

با استفاده از اصل هامیلتون، شکل تغییراتی انرژی پتانسیل کل برای نانو لوله سه جداره نیتريد بور به صورت زیر بیان می‌شود:

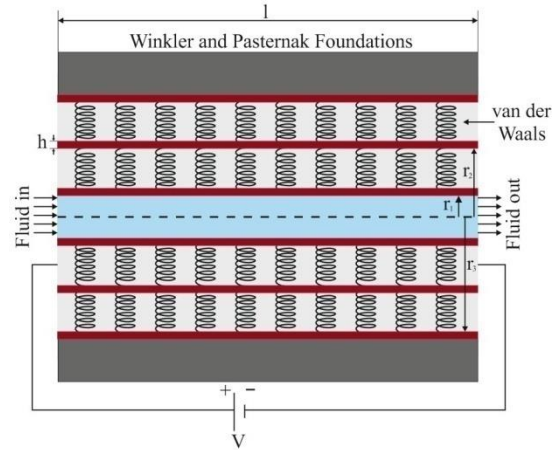
$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \Pi \, dt = 0 \quad (14)$$

با جایگذاری رابطه (۱۳) در رابطه (۱۴) داریم:

$$\delta \Pi = \delta K - \delta U - \delta V = 0 \quad (15)$$

انرژی کرنشی نانو لوله سه جداره نیتريد بور بر اساس مدل تیر اویلر برنولی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$U = \int_0^L \int_{A_i} (\sigma_x^T \varepsilon_x - D_x E_x) dA_i dx \quad (16)$$



شکل ۱- شکل شماتیکی از نانو لوله سه جداره نیتريد بور حاوی جریان سیال ویسکوز بر بستر الاستیک

در این تحقیق نانو لوله سه جداره نیتريد بور مورد بررسی قرار گرفته که جداره‌های مجاور دو به دو به یکدیگر نیروی واندروالس وارد می‌کنند (شکل (۱)). لذا نیروی برهم کنش واندروالس (اثر واندروالس) بین جداره‌های اول و دوم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$q_1 = C_1 (w_2 - w_1) \quad (10)$$

از آنجایی که نانو لوله جداره دوم بین نانو لوله‌های جداره اول و سوم قرار دارد، لذا اثر نیروهای واندروالس وارد شده به این لایه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$q_2 = \left[\frac{-C_2 R_3}{R_2} (w_3 - w_2) - \frac{C_1 R_1}{R_2} (w_2 - w_1) \right] \quad (11)$$

از آنجایی که نیروی برهم کنش بین جداره‌های مجاور در نظر گرفته می‌شود. لذا از نیروی واندروالس بین جداره‌های اول و سوم را صرفنظر نموده و نیروی واندروالس بین جداره‌های دوم و سوم به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$q_3 = C_2 (w_3 - w_2) \quad (12)$$

$$N_x^T - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 N_x^T}{\partial x^2} = EA \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + h_{11} A \frac{\partial \varphi}{\partial x} - E \alpha_x A T + E^s A^s \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} E^s A^s \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \tau^s A^s \quad (20)$$

$$M_x^T - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M_x^T}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - E^s I^s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (21)$$

انرژی جنبشی نانو لوله نیتريد بور حاوی سیال ویسکوز به صورت زیر بیان می‌شود:

$$K = \int \frac{1}{2} \rho V_i V_i dV \quad (22)$$

که ρ و V_i به ترتیب نشان دهنده چگالی و سرعت می‌باشند.

انرژی جنبشی نانولوله سه جداره نیتريد بور با استفاده از رابطه (۲۲) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$K_{tube} = \frac{1}{2} \rho_t \int_0^l \left\{ \int_{A_1} \left[\left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_1}{\partial t} \right)^2 \right] dA_1 + \int_{A_2} \left[\left(\frac{\partial \bar{U}_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial t} \right)^2 \right] dA_2 + \int_{A_3} \left[\left(\frac{\partial \bar{U}_3}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_3}{\partial t} \right)^2 \right] dA_3 \right\} dx \quad (23)$$

که K_{tube} و ρ_t به ترتیب انرژی جنبشی و چگالی نانو لوله می‌باشند.

کار ناشی از نیروهای واندروالس و بستر الاستیک پاسترناک به صورت زیر نوشته می‌شود [۶]:

معادله متشکله نانو لوله نیتريد بور تحت تأثیر تنش‌های سطحی و بارگذاریهای الکترو ترمو مکانیکی با جایگذاری روابط (۲) و (۵) در رابطه (۶) بدست می‌آید:

$$\sigma_x^T - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_x^T}{\partial x^2} = E \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + h_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - E \alpha_x T + E^s \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \tau^s \quad (17)$$

انرژی کرنشی نانو لوله نیتريد بور با جایگذاری روابط (۳)، (۴)، (۷)، (۸) و (۱۷) در رابطه (۱۶) بدست می‌آید:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{A_i} \left\{ \sigma_x^T \frac{\partial u_i}{\partial x} - \sigma_x^T z \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \sigma_x^T \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \right)^2 \right\} dA_i dx + \frac{1}{2} \int_0^l \int_{A_i} \left\{ h_{11} \frac{\partial u_i}{\partial x} - h_{11} z \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{1}{2} h_{11} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \right)^2 - h_{11} \alpha_x T - \epsilon_{11} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right\} dA_i dx \quad (18)$$

که زیر نویس i مربوط به نانو لوله‌های اول تا سوم است. نیروی محوری و گشتاور منتجه نانو لوله نیتريد بور به صورت زیر تعريف می‌شود:

$$N_x^T = \int_A \sigma_x^T dA \quad (19)$$

$$M_x^T = \int_A \sigma_x^T z dA$$

با جایگذاری رابطه (۱۷) در رابطه (۱۹)، نیروها و ممان‌های منتجه برحسب میدان جابجایی تحت بارگذاریهای الکترو ترمو مکانیکی با در نظر گرفتن اثر مقیاس کوچک و تنشهای سطحی به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$K_{fluid} = \frac{1}{2} \rho_f \int_0^\ell \int_{A_f} \left[\left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial t} + u_f \cos \theta \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{W}_1}{\partial t} - u_f \sin \theta \right)^2 \right] dA_f dx \quad (27)$$

که ρ_f و K_{fluid} به ترتیب نشان دهنده انرژی جنبشی و چگالی سیال هستند.

در نتیجه عبور سیال از داخل نانو لوله، دو نیروی مماسی و جانب مرکز از طرف سیال به جداره داخلی نانولوله وارد می‌شود که به دلیل ثابت بودن سرعت سیال، نیروی مماسی برابر صفر شده و کار مجازی ناشی از عبور سیال فقط ناشی از نیروی جانب مرکز به صورت زیر بدست می‌آید [۷]:

$$W_{v, fluid} = - \int_0^\ell \int_{A_f} \left[m_f u_f^2 \frac{\partial^2 \bar{W}_1}{\partial x^2} \cos \theta \bar{W}_1 + m_f u_f^2 \frac{\partial^2 \bar{W}_1}{\partial x^2} \sin \theta \bar{U}_1 \right] dA_f dx \quad (28)$$

برای محاسبه اثر ویسکوزیته بر روی نانو لوله سه جداره نیتريد بور (TWBNNT) از معادله نویر استوکس استفاده می‌گردد.

$$\rho_f \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (29)$$

با جایگذاری روابط (۲۶) در رابطه (۲۹)، معادلات نویر استوکس به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\rho_f \left[\frac{\partial}{\partial t} + u_f \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial t} + u_f \cos \theta \right] = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial t} + u_f \cos \theta \right]$$

$$W_v = \frac{1}{2} \int_0^\ell q_1 w_1 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell q_2 w_2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell q_3 w_3 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell F_{Elastic\ medium} w_3 dx \quad (24)$$

کار ناشی از نیروهای واندروالس و بستر الاستیک با جایگذاری روابط (۹)، (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) در رابطه (۲۴) محاسبه می‌شود.

$$W_v = \frac{1}{2} \int_0^\ell C_1 (w_2 - w_1) w_1 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\frac{-C_2 R_3}{R_2} (w_3 - w_2) - \frac{C_1 R_1}{R_2} (w_2 - w_1) \right] w_2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell C_2 (w_3 - w_2) w_3 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell (-K_w w_3 + G_p \nabla^2 w_3) w_3 dx \quad (25)$$

بردار میدان سرعت، $\vec{V} = (V_x, V_z)$ ، در مدل تیر اویلر برنولی وابسته به سرعت سیال و سرعت نانو لوله می‌باشد. این بردار توسط کانگ و همکارانش [۱۲] در مقیاس میکرو و توسط ردی و وانگ [۱۳] در مقیاس ماکرو بکار گرفته شده است. بردار فوق به صورت ذیل تعریف می‌شود [۷]:

$$V_x = \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial t} + u_f \cos \theta$$

$$V_z = \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial t} - u_f \sin \theta \quad (26)$$

در معادله فوق u_f سرعت سیال و $\theta = -\frac{\partial w}{\partial x}$ می‌باشد که با جایگذاری رابطه (۲۶) در رابطه (۲۲)، انرژی جنبشی سیال جاری در نانولوله داخلی (نانو لوله جداره اول) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$\delta w_1 :$

$$\begin{aligned}
& -\rho_t I_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial t^2} + (m_1 + m_f) \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \\
& -\rho_f I_f \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 M_{x1}^T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} N_{x1}^T \\
& + 2m_f u_f^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - q_1 - \mu A_f \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial t} \\
& - \mu A_f u_f \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} = 0
\end{aligned} \quad (33)$$

معادله تعادل الکتریکی نانو لوله نیتريد بور جداره اول:

 $\delta \varphi_1 :$

$$h_{11} A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - 2 \epsilon_{11} A_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = 0 \quad (34)$$

معادله حرکت طولی نانو لوله نیتريد بور جداره دوم:

 $\delta u_2 :$

$$m_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{\partial N_{x2}^T}{\partial x} - h_{11} A_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = 0 \quad (35)$$

معادله حرکت عرضی نانو لوله نیتريد بور جداره دوم:

 $\delta w_2 :$

$$\begin{aligned}
& -\rho_t I_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial t^2} + m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \\
& - \frac{\partial^2 M_{x2}^T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} N_{x2}^T - q_2 = 0
\end{aligned} \quad (36)$$

معادله تعادل الکتریکی نانو لوله نیتريد بور جداره دوم:

 $\delta \varphi_2 :$

$$h_{11} A_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - 2 \epsilon_{11} A_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = 0 \quad (37)$$

معادله حرکت طولی نانو لوله نیتريد بور جداره سوم:

$$\begin{aligned}
\rho_f \left[\frac{\partial}{\partial t} + u_f \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial \bar{W}_1}{\partial t} - u_f \sin \theta \right] = \\
- \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \bar{W}_1}{\partial t} - u_f \sin \theta \right]
\end{aligned} \quad (30)$$

کار ناشی از ویسکوزیته ($W_{viscosity}$) با استفاده از رابطه (۳۰) بدست آمده و در معادله حرکت تاثیر داده می شود.

با استفاده از اصل هامیلتون (رابطه (۱۵)) می توان معادله حرکت حاکم بر نانو لوله سه جداره نیتريد بور (TWBNNT) حاوی جریان سیال بر بستر الاستیک را بدست آورد:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \delta [K_{fluid} + K_{tube} \\
& - (U_s - W_v - W_{v fluid} - W_{viscosity})] dt = 0
\end{aligned} \quad (31)$$

۲-۵- بدست آوردن معادلات حاکم بر مساله

معادله حرکت خطی نانو لوله نیتريد بور سه جداره حاوی جریان سیال ویسکوز بر بستر الاستیک پاسترناک تحت بارگذاریهای الکترو ترمو مکانیکی با جایگذاری روابط (۱۸)، (۲۳)، (۲۵)، (۲۷)، (۲۸) و (۳۰) در رابطه (۳۱) و بکارگیری حساب تغییرات به صورت زیر بدست می آید:

معادله حرکت طولی نانو لوله نیتريد بور جداره اول:

 $\delta u_1 :$

$$\begin{aligned}
& (m_1 + m_f) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial N_{x1}^T}{\partial x} \\
& - h_{11} A_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \mu A_f \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial t} = 0
\end{aligned} \quad (32)$$

معادله حرکت عرضی نانو لوله نیتريد بور جداره اول:

$\delta w_1 :$

$$\begin{aligned} & -\rho_t I_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial t^2} + (m_1 + m_f) \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \\ & + EI_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} - \rho_f I_f \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial t^2} \\ & + (e_0 a)^2 \rho_t I_1 \frac{\partial^6 w_1}{\partial x^4 \partial t^2} + (e_0 a)^2 \rho_f I_f \frac{\partial^6 w_1}{\partial x^4 \partial t^2} \\ & - (e_0 a)^2 (m_1 + m_f) \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial t^2} - (e_0 a)^2 E \alpha_x A_f T \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \\ & - 2(e_0 a)^2 m_f u_f^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} \\ & + (e_0 a)^2 \mu A_f \frac{\partial^5 w_1}{\partial x^4 \partial t} + (e_0 a)^2 \mu A_f u_f \frac{\partial^5 w_1}{\partial x^5} \\ & + E \alpha_x A_f T \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + 2m_f u_f^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \\ & - q_1 - \mu A_f \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial t} - \mu A_f u_f \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

$\delta u_2 :$

$$\begin{aligned} & m_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - EA_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - 2h_{11} A_2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} \\ & - (e_0 a)^2 m_2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 h_{11} A_2 \frac{\partial^4 \phi_2}{\partial x^4} = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

$\delta w_2 :$

$$\begin{aligned} & -\rho_t I_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial t^2} + m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \\ & + EI_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + (e_0 a)^2 \rho_t I_2 \frac{\partial^6 w_2}{\partial x^4 \partial t^2} \\ & - (e_0 a)^2 m_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial t^2} - (e_0 a)^2 E \alpha_x A_2 T \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \\ & + (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2} + E \alpha_x A_2 T \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - q_2 = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

$\delta u_3 :$

$$m_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \frac{\partial N_{x3}^T}{\partial x} - h_{11} A_3 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} = 0 \quad (38)$$

معادله حرکت عرضی نانو لوله نیتريد بور جداره سوم:

$\delta w_3 :$

$$\begin{aligned} & -\rho_t I_3 \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^2 \partial t^2} + m_3 \frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} \\ & - \frac{\partial^2 M_{x3}^T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} N_{x3}^T \\ & - q_3 + K_w w_3 - G_p \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

معادله تعادل الكتريكي نانو لوله نیتريد بور جداره سوم:

$\delta \phi_3 :$

$$h_{11} A_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - 2 \epsilon_{11} A_3 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} = 0 \quad (40)$$

حال با بدست آوردن مقدار جمله‌های N_{x1}^T و $\frac{\partial^2 M_{x1}^T}{\partial x^2}$ از روابط (۲۰) و (۲۱) و جایگذاری آن در معادلات (۳۲)، (۳۳)، (۳۵)، (۳۶)، (۳۸) و (۳۹)، معادلات تعادل حرکت برای نانو لوله نیتريد بور سه جداره تحت بارگذاریهای الکترو ترمو مکانیکی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$\delta u_1 :$

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_f) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - EA_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - 2h_{11} A_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \\ & - (e_0 a)^2 (m_1 + m_f) \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 h_{11} A_1 \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} \\ & + (e_0 a)^2 \mu A_f \frac{\partial^5 u_1}{\partial x^4 \partial t} - \mu A_f \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial t} = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

$$h^s = \frac{E^s I^s}{EA_3 \ell^2}, \quad B^s = \frac{\tau^s A^s}{EA_3}, \quad D^s = \frac{E^s A^s}{EA_3} \quad (۴۷)$$

که $E^s I^s$ و B^s برابر است با [۱۰]:

$$E^s I^s = \frac{1}{8} \pi E_s t_0 (d_3^3) \quad (۴۸)$$

$$B^s = 2\tau_0 (d_3)$$

که d_3 قطر نانو لوله سوم می باشد.

حال معادلات بی بعد خطی برای نانو لوله نیتريد بور سه جداره با جایگذاری روابط (۴۷) (پارامترهای بی بعد) در روابط (۳۴)، (۳۷)، (۴۰)، (۴۱)، (۴۲)، (۴۳)، (۴۴)، (۴۵) و (۴۶) به شرح ذیل بدست می‌آیند:

$$\delta u_1:$$

$$(1+f_1 \bar{\rho}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} - 2\eta_1 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_1}{\partial \zeta^2}$$

$$- e_n^2 (1+f_1 \bar{\rho}) \frac{\partial^4 u_1}{\partial \zeta^2 \partial \tau^2} + e_n^2 \eta_1 \frac{\partial^4 \bar{\varphi}_1}{\partial \zeta^4}$$

$$+ e_n^2 \bar{\mu} f_1 \frac{1}{\eta_1} \sqrt{\bar{\rho}} \frac{\partial^5 u_1}{\partial \zeta^4 \partial \tau}$$

$$- \bar{\mu} f_1 \sqrt{\bar{\rho}} \left(\frac{1}{\eta_1} \right) \frac{\partial^3 u_1}{\partial \zeta^2 \partial \tau} = 0 \quad (۴۹)$$

$$\delta \varphi_1:$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} - 2\eta_1 \gamma \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_1}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (۵۰)$$

$$\delta u_3:$$

$$m_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - EA_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}$$

$$- 2h_{11} A_3 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - E^s A_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}$$

$$- (e_0 a)^2 m_3 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 h_{11} A_3 \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial x^4} = 0 \quad (۴۵)$$

$$\delta w_3:$$

$$-\rho_t I_3 \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^2 \partial t^2} + m_3 \frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2}$$

$$+ (EI_3 + E^s I^s) \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^4} + (e_0 a)^2 \rho_t I_3 \frac{\partial^6 w_3}{\partial x^4 \partial t^2}$$

$$- (e_0 a)^2 m_3 \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^2 \partial t^2} - (e_0 a)^2 E \alpha_x A_3 T \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^4}$$

$$+ (e_0 a)^2 \tau^s A^s \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^4} + (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 q_3}{\partial x^2}$$

$$- (e_0 a)^2 K_w \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 G_p \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^4}$$

$$+ E \alpha_x A_3 T \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} - \tau^s A^s \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2}$$

$$- q_3 + K_w w_3 - G_p \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} = 0 \quad (۴۶)$$

پارامترهای بی بعد هندسی، الکتریکی، حرارتی و مکانیکی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\zeta = \frac{x}{L}, \quad (u_i, w_i) = \frac{(U_i, W_i)}{r}, \quad \eta_i = \frac{\ell}{r_i},$$

$$\tau = \frac{t}{\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho_t}}, \quad u_f = \sqrt{\frac{\rho_f}{E}} U_f, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{r \sqrt{E \rho_f}}$$

$$f_i = \frac{A_f}{A_i}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_f}{\rho_t}, \quad \bar{\varphi}_i = \frac{\varphi_i h_{11}}{\ell E}, \quad c_i = \frac{C_i \ell^2}{EA_i}, \quad \bar{\Delta T} = \alpha_x T$$

$$\bar{k}_w = \frac{K_w \ell^2}{EA_i}, \quad \bar{G}_p = \frac{G_p}{EA_i}, \quad \gamma = \frac{\epsilon_{11} E}{h_{11}^2}, \quad en = \frac{e_0 a}{\ell}, \quad \bar{I}_i = \frac{\rho_i \ell_i}{A_i r_i}$$

$$\begin{aligned} \delta w_2 : \\ -\bar{I}_2 \left(\frac{1}{\eta_2} \right)^2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial \zeta^2 \partial \tau^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \tau^2} + \bar{I}_2 \left(\frac{1}{\eta_2} \right)^2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial \zeta^4} \\ + e_n^2 \bar{I}_2 \left(\frac{1}{\eta_2} \right)^2 \frac{\partial^6 w_2}{\partial \zeta^4 \partial \tau^2} - e_n^2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial \zeta^2 \partial \tau^2} \\ - e_n^2 \bar{\Delta T} \frac{\partial^4 w_2}{\partial \zeta^4} - e_n^2 \bar{c}_2 \frac{R_3}{R_2} \left\{ \frac{\partial^2 w_3}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta^2} \right\} \\ - e_n^2 \bar{c}_1 \frac{A_1 R_1}{A_2 R_2} \left\{ \frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} \right\} + \bar{\Delta T} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta^2} \\ + \bar{c}_2 \frac{R_3}{R_2} \{w_3 - w_2\} + \bar{c}_1 \frac{A_1 R_1}{A_2 R_2} \{w_2 - w_1\} = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi_2 : \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \zeta^2} - 2\eta_2 \gamma \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_2}{\partial \zeta^2} = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

روابط (۵۲) و (۵۳) به ترتیب نشان دهنده معادلات حرکت نانو لوله جداره دوم در راستای طولی و عرضی و معادله (۵۴) تعادل الکتریکی نانو لوله جداره دوم را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} \delta u_3 : \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \zeta^2} - 2\eta_3 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_3}{\partial \zeta^2} \\ - D^s \frac{\partial^2 u_3}{\partial \zeta^2} - e_n^2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial \zeta^2 \partial \tau^2} \\ + e_n^2 \eta_3 \frac{\partial^4 \bar{\varphi}_3}{\partial \zeta^4} = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi_3 : \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial \zeta^2} - 2\eta_3 \gamma \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_3}{\partial \zeta^2} = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \delta w_1 : \\ -\bar{I}_1 \left(\frac{1}{\eta_1} \right)^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial \zeta^2 \partial \tau^2} + (1+f_1 \bar{\rho}) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} \\ - \bar{I}_f \bar{\rho} f_1 \left(\frac{1}{\eta_1} \right)^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial \zeta^2 \partial \tau^2} + \bar{I}_1 \left(\frac{1}{\eta_1} \right)^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial \zeta^4} \\ + e_n^2 \bar{I}_1 \left(\frac{1}{\eta_1} \right)^2 \frac{\partial^6 w_1}{\partial \zeta^4 \partial \tau^2} + e_n^2 \bar{I}_f f_1 \bar{\rho} \left(\frac{1}{\eta_1} \right)^2 \frac{\partial^6 w_1}{\partial \zeta^4 \partial \tau^2} \\ - e_n^2 (1+f_1 \bar{\rho}) \frac{\partial^4 w_1}{\partial \zeta^2 \partial \tau^2} - e_n^2 \bar{\Delta T} \frac{\partial^4 w_1}{\partial \zeta^4} \\ - 2e_n^2 f_1 u_f^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial \zeta^4} + e_n^2 \bar{c}_1 \left\{ \frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} \right\} \\ + e_n^2 \bar{\mu} \sqrt{\rho} f_1 \left(\frac{1}{\eta_1} \right) \frac{\partial^5 w_1}{\partial \zeta^4 \partial \tau} + e_n^2 \bar{\mu} f_1 u_f \left(\frac{1}{\eta_1} \right) \frac{\partial^5 w_1}{\partial \zeta^5} \\ + \bar{\Delta T} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} + 2f_1 u_f^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} - \bar{c}_1 \{w_2 - w_1\} \\ - \bar{\mu} \sqrt{\rho} f_1 \left(\frac{1}{\eta_1} \right) \frac{\partial^3 w_1}{\partial \zeta^2 \partial \tau} - \bar{\mu} f_1 u_f \left(\frac{1}{\eta_1} \right) \frac{\partial^3 w_1}{\partial \zeta^3} = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

روابط (۴۹) و (۵۱) به ترتیب معادلات حرکت نانو لوله جداره اول در راستای طولی و عرضی و رابطه (۵۰) معادله تعادل الکتریکی نانو لوله جداره اول می‌باشد.

$$\begin{aligned} \delta u_2 : \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial \zeta^2} - 2\eta_2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_2}{\partial \zeta^2} \\ - e_n^2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial \zeta^2 \partial \tau^2} + e_n^2 \eta_2 \frac{\partial^4 \bar{\varphi}_2}{\partial \zeta^4} = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

روش برای حل مساله فضای کمتری در رایانه اشغال شده و روند حل بسیار سریعتر است [۱۶].
در روش مربع سازی دیفرانسیلی، دامنه‌ی حل مساله به N گره‌ی مجزا تقسیم می‌شود. رابطه‌ی زیر توزیع مناسبی از N گره را در طول نانولوله ارائه می‌دهد [۱۷]:

$$\zeta_k = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{(k-1)\pi}{N-1} \right] \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (58)$$

برای هر گره بدست آمده از رابطه‌ی (۵۸)، مشتق توابع بدون بعد جابجایی طولی u_i ، جابجایی عرضی w_i و پتانسیل الکتریکی $\bar{\varphi}_i$ در هر نقطه‌ی مشخص از دامنه (ζ_k)، با استفاده از حاصل جمع یک سری از مقادیر آن تابع در تمام نقاط مجزای دامنه ($0 < \zeta < 1$) تقریب زده می‌شود [۱۸]:

$$\frac{d^n u_i(\zeta_k)}{d\zeta^n} = \sum_{j=1}^N C_{kj}^{(n)} u_i(\zeta_j) \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (59)$$

$$\frac{d^n w_i(\zeta_k)}{d\zeta^n} = \sum_{j=1}^N C_{kj}^{(n)} w_i(\zeta_j) \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (60)$$

$$\frac{d^n \bar{\varphi}_i(\zeta_k)}{d\zeta^n} = \sum_{j=1}^N C_{kj}^{(n)} \bar{\varphi}_i(\zeta_j) \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (61)$$

که در آن n نشان دهنده‌ی مرتبه‌ی مشتق جزئی و $C_{kj}^{(n)}$ ضرایب توابع وزن در جهت ζ و برای مرتبه‌ی n است که برای مرتبه‌ی یک و بالاتر به صورت زیر بیان می‌شود [۱۷ و ۲۰]:

$$C_{kj}^{(1)} = \begin{cases} \frac{M(\zeta_k)}{(x_k - x_j)M(\zeta_j)} & (k \neq j, \quad k, j = 1, 2, 3, \dots, N) \\ -\sum_{m=1}^N C_{km}^{(1)} & (k = j, \quad k, j = 1, 2, 3, \dots, N, \quad k \neq m) \end{cases} \quad (62)$$

$$C_{kj}^{(n)} = C_{kj}^{(1)} C_{kj}^{(n-1)} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \delta w_3 : \\ -\bar{I}_3 \left(\frac{1}{\eta_3} \right)^2 \frac{\partial^4 w_3}{\partial \zeta^2 \partial \tau^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial \tau^2} \\ + \bar{I}_3 \left(\frac{1}{\eta_3} \right)^2 \frac{\partial^4 w_3}{\partial \zeta^4} + h^s \frac{\partial^4 w_3}{\partial \zeta^4} \\ + e_n^2 \bar{I}_3 \left(\frac{1}{\eta_3} \right)^2 \frac{\partial^6 w_3}{\partial \zeta^4 \partial \tau^2} - e_n^2 \frac{\partial^4 w_3}{\partial \zeta^2 \partial \tau^2} \\ - e_n^2 \bar{\Delta T} \frac{\partial^4 w_3}{\partial \zeta^4} + e_n^2 B^s \frac{\partial^4 w_3}{\partial \zeta^4} \\ + e_n^2 \bar{c}_2 \left\{ \frac{\partial^2 w_3}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta^2} \right\} - e_n^2 \bar{k}_w \frac{\partial^2 w_3}{\partial \zeta^2} \\ - \bar{c}_2 \{ w_3 - w_2 \} + e_n^2 \bar{G}_p \frac{\partial^4 w_3}{\partial \zeta^4} + \bar{\Delta T} \frac{\partial^2 w_3}{\partial \zeta^2} \\ - B^s \frac{\partial^2 w_3}{\partial \zeta^2} + \bar{k}_w w_3 - \bar{G}_p \frac{\partial^2 w_3}{\partial \zeta^2} = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

روابط (۵۵) و (۵۷) به ترتیب معادلات حرکت نانو لوله جداره سوم در راستای طولی و عرضی را نشان می‌دهند و رابطه (۵۶) معادله تعادل الکتریکی نانو لوله نیتريد بور جداره سوم را ارائه می‌دهد.

۳- حل معادلات حرکت با استفاده از روش

مربع سازی دیفرانسیلی (DQM)

با استفاده از روش مربع سازی دیفرانسیلی در مقایسه با سایر روش‌های عددی شامل روش اجزاء محدود و روش تفاضل محدود می‌توان جواب‌های دقیقی بدست آورد که با جواب‌های تحلیلی سازگاری بسیار بالایی دارد. لازم به ذکر است که در این روش با تعداد گره‌های بسیار کم و زمان حل کمتر در مقایسه با سایر روش‌های عددی می‌توان به دقت مورد نظر دست یافت [۱۴ و ۱۵]. این روش در مسائل دینامیکی، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله را به دستگاه معادلات جبری تبدیل نموده و زمینه را برای حل مساله مقدار ویژه مهیا می‌سازد. همچنین در این

$$\begin{aligned} \delta w^{(1)} : & \\ & \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^2 \bar{I}_1 \Omega^2 \sum_{i=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(1)} - (1+f_1 \bar{\rho}) \Omega^2 w_i^{(1)} \\ & + \bar{\rho} f_1 \bar{I}_f \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^2 \Omega^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(1)} \\ & + \bar{I}_1 \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} w_k^{(1)} \\ & - e_n^2 \bar{I}_1 \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^2 \Omega^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} w_k^{(1)} \\ & - e_n^2 \bar{I}_f f_1 \bar{\rho} \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^2 \Omega^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} w_k^{(1)} \\ & + (1+f_1 \bar{\rho}) e_n^2 \Omega^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(1)} \\ & - e_n^2 \bar{\Delta T} \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} w_k^{(1)} \\ & - 2e_n^2 f_1 u_f^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} w_k^{(1)} + e_n^2 \bar{c}_1 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(2)} \\ & - e_n^2 \bar{c}_1 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(1)} \\ & + e_n^2 \bar{\mu} \sqrt{\bar{\rho}} f_1 \left(\frac{1}{\eta_1}\right) (j\Omega) \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} w_k^{(1)} \\ & + f_1 e_n^2 \bar{\mu} u_f \left(\frac{1}{\eta_1}\right) \sum_{i=1}^n C_{ik}^{(5)} w_k^{(1)} + \bar{\Delta T} \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(1)} \\ & + 2f_1 u_f^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(1)} - \bar{c}_i w_i^{(2)} + \bar{c}_i w_i^{(1)} \\ & - \bar{\mu} \sqrt{\bar{\rho}} f_1 \left(\frac{1}{\eta_1}\right) (j\Omega) \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(1)} \\ & - \bar{\mu} f_1 u_f \left(\frac{1}{\eta_1}\right) \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(3)} w_k^{(1)} = 0 \\ & (i = 1, 2, \dots, N) \\ \delta u^{(2)} : & \\ & -\Omega^2 u_i^{(2)} - \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} u_k^{(2)} - 2\eta_2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} \varphi_k^{(2)} \\ & + e_n^2 \Omega^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} u_k^{(2)} + \eta_2 e_n^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} \varphi_k^{(2)} = 0 \\ & (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

که در آن $M(\zeta_k)$ به صورت زیر تعریف می‌گردد
[۱۷ و ۲۰]:

$$M(\zeta_k) = \prod_{j=1(j \neq k)}^N (\zeta_k - \zeta_j) \quad (64)$$

پاسخ معادلات حرکت را می‌توان به صورت زیر فرض نمود [۱۸]:

$$u_i(\zeta, t) = u_i(\zeta) \exp(j\Omega \tau) \quad (65)$$

$$w_i(\zeta, t) = w_i(\zeta) \exp(j\Omega \tau) \quad (66)$$

$$\bar{\varphi}_i(\zeta, t) = \bar{\varphi}_i(\zeta) \exp(j\Omega \tau) \quad (67)$$

که در آن j نشان دهنده‌ی اپراتور موهومی و Ω فرکانس طبیعی بدون بعد ارتعاشات نانو میله است. معادلات حرکت نانو لوله با استفاده از روش مربع سازی دیفرانسیلی با جایگذاری معادلات (۶۵)، (۶۶) و (۶۷) و همچنین معادلات (۵۹)، (۶۰) و (۶۱) در معادلات حرکت بدون بعد طولی، عرضی و تعادل الکتریکی برای نانو لوله-های اول تا سوم (روابط (۴۹) تا (۵۷)) به صورت زیر بدست می‌آید [۲۰]:

$$\begin{aligned} \delta u^{(1)} : & \\ & -\Omega^2 (1 + \bar{\rho} f_1) u_k^{(1)} \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} u_k^{(1)} \\ & - 2\eta_1 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} \varphi_k^{(1)} \\ & + e_n^2 (1 + \bar{\rho} f_1) \Omega^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} u_k^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \eta_1 e_n^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} \varphi_k^{(1)} \\ & + e_n^2 \sqrt{\bar{\rho}} \bar{\mu} f_1 \frac{1}{\eta_1} (i\Omega) \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} u_k^{(1)} \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} & - \bar{\mu} \sqrt{\bar{\rho}} f_1 \frac{1}{\eta_1} (i\Omega) \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} u_k^{(1)} = 0 \\ & (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi^{(1)} : & \\ & \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} u_k^{(1)} - 2\gamma \eta_1 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} \varphi_k^{(1)} = 0 \\ & (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (69)$$

$\delta w^{(3)}$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\eta_3}\right)^2 \bar{I}_3 \Omega^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(3)} - \Omega^2 w_i^{(3)} \\ & + \bar{I}_3 \left(\frac{1}{\eta_3}\right)^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} w_k^{(3)} + h^s \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} w_k^{(3)} \\ & - e_n^2 \bar{I}_3 \left(\frac{1}{\eta_3}\right)^2 \Omega^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} w_k^{(3)} \\ & + e_n^2 \Omega^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(3)} \\ & - e_n^2 \bar{\Delta T} \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} w_k^{(3)} + e_n^2 B^s \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} w_k^{(3)} \\ & + e_n^2 \bar{c}_2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(3)} - e_n^2 \bar{c}_2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(2)} \\ & - \bar{k}_w e_n^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(3)} - \bar{c}_2 w_i^{(3)} + \bar{c}_2 w_i^{(2)} \\ & + \bar{G}_p e_n^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} w_k^{(3)} + \bar{\Delta T} \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(3)} \\ & - B^s \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(3)} + \bar{k}_w w_i^{(3)} - \bar{G}_p \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(3)} = 0 \end{aligned} \quad (76)$$

$(i = 1, 2, \dots, N)$

لازم به ذکر است که با استفاده از روش مربع سازی دیفرانسیلی معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت نانو لوله نیتريد بور سه جداره (روابط (۴۹) تا (۵۷)) به دستگاه معادلات جبری (روابط (۶۸) تا (۷۶)) تبدیل می‌شود.

معادله‌های (۶۸)، (۷۱) و (۷۴) به ترتیب معادلات جبری حرکت طولی نانو لوله‌های نیتريد بور اول، دوم و سوم را نشان می‌دهد. روابط (۶۹)، (۷۲) و (۷۵) به ترتیب نشان دهنده معادلات جبری تعادل الکتریکی نانو لوله‌های نیتريد بور اول، دوم و سوم می‌باشد. در نهایت روابط (۷۰)، (۷۳) و (۷۶) به ترتیب معادلات جبری حرکت عرضی نانو لوله‌های نیتريد بور اول، دوم و سوم را ارائه می‌دهند.

برای جلوگیری از اشتباه اندیسی مربوط به هرکدام از نانو لوله‌ها و ضرایب مربوط به روش مربع سازی دیفرانسیلی

$\delta \varphi^{(2)}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} u_k^{(2)} - 2\gamma \eta_2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} \varphi_k^{(2)} = 0 \\ & (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (72)$$

$\delta w^{(2)}$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\eta_2}\right)^2 \bar{I}_2 \Omega^2 \sum_{i=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(2)} - \Omega^2 w_i^{(2)} \\ & + \bar{I}_2 \left(\frac{1}{\eta_2}\right)^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} w_k^{(2)} \\ & - e_n^2 \bar{I}_2 \left(\frac{1}{\eta_2}\right)^2 \Omega^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} w_k^{(2)} \\ & + e_n^2 \Omega^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(2)} - e_n^2 \bar{\Delta T} \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} w_k^{(2)} \\ & - e_n^2 \bar{c}_2 \frac{R_3}{R_2} \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(3)} + e_n^2 \bar{c}_2 \frac{R_3}{R_2} \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(2)} \\ & - e_n^2 \bar{c}_1 \frac{A_1 R_1}{A_2 R_2} \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(2)} \\ & + e_n^2 \bar{c}_1 \frac{A_1 R_1}{A_2 R_2} \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(1)} \\ & + \bar{\Delta T} \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} w_k^{(2)} + \bar{c}_2 \frac{R_3}{R_2} w_i^{(3)} - \bar{c}_2 \frac{R_3}{R_2} w_i^{(2)} \\ & + \bar{c}_1 \frac{A_1 R_1}{A_2 R_2} w_i^{(2)} - \bar{c}_1 \frac{A_1 R_1}{A_2 R_2} w_i^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (73)$$

$(i = 1, 2, \dots, N)$

$\delta u^{(3)}$:

$$\begin{aligned} & -\Omega^2 u_i^{(3)} - \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} u_k^{(3)} - 2\eta_3 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} \varphi_k^{(3)} \\ & - D^s \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} u_k^{(3)} + e_n^2 \Omega^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} u_k^{(3)} \\ & + \eta_3 e_n^2 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(4)} \varphi_k^{(3)} = 0 \\ & (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (74)$$

$\delta \varphi^{(3)}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} u_k^{(3)} - 2\gamma \eta_3 \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} \varphi_k^{(3)} = 0 \\ & (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} w^{(1)}(0, \tau) &\Rightarrow w^{(1)}(0) = 0 \Rightarrow w_1^{(1)} = 0 \\ w^{(1)}(l, \tau) &\Rightarrow w^{(1)}(l) = 0 \Rightarrow w_N^{(1)} = 0 \\ w^{(2)}(0, \tau) &\Rightarrow w^{(2)}(0) = 0 \Rightarrow w_1^{(2)} = 0 \\ w^{(2)}(l, \tau) &\Rightarrow w^{(2)}(l) = 0 \Rightarrow w_N^{(2)} = 0 \\ w^{(3)}(0, \tau) &\Rightarrow w^{(3)}(0) = 0 \Rightarrow w_1^{(3)} = 0 \\ w^{(3)}(l, \tau) &\Rightarrow w^{(3)}(l) = 0 \Rightarrow w_N^{(3)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{(1)}(0, \tau)}{\partial \zeta} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial w^{(1)}(0)}{\partial \zeta} = 0 \Rightarrow \sum_{k=2}^{N-1} C^{(1)}_{1k} w_k^{(1)} = 0 \\ \frac{\partial w^{(1)}(l, \tau)}{\partial \zeta} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial w^{(1)}(l)}{\partial \zeta} = 0 \Rightarrow \sum_{k=2}^{N-1} C^{(1)}_{Nk} w_k^{(1)} = 0 \\ \frac{\partial w^{(2)}(0, \tau)}{\partial \zeta} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial w^{(2)}(0)}{\partial \zeta} = 0 \Rightarrow \sum_{k=2}^{N-1} C^{(1)}_{1k} w_k^{(2)} = 0 \\ \frac{\partial w^{(2)}(l, \tau)}{\partial \zeta} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial w^{(2)}(l)}{\partial \zeta} = 0 \Rightarrow \sum_{k=2}^{N-1} C^{(1)}_{Nk} w_k^{(2)} = 0 \\ \frac{\partial w^{(3)}(0, \tau)}{\partial \zeta} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial w^{(3)}(0)}{\partial \zeta} = 0 \Rightarrow \sum_{k=2}^{N-1} C^{(1)}_{1k} w_k^{(3)} = 0 \\ \frac{\partial w^{(3)}(l, \tau)}{\partial \zeta} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial w^{(3)}(l)}{\partial \zeta} = 0 \Rightarrow \sum_{k=2}^{N-1} C^{(1)}_{Nk} w_k^{(3)} = 0 \end{aligned} \quad (79)$$

با استفاده از روابط (77) و (79) داریم:

$$\left([K] + \Omega[C] + \Omega^2[M] \right) \begin{pmatrix} d_b \\ d_d \end{pmatrix} = 0 \quad (80)$$

که در آن زیر نویس‌های b و d به ترتیب نشان دهنده-
ی گره‌ها در مرز مساله و سایر گره‌ها هستند. رابطه‌ی
(80) یک مساله‌ی مقدار ویژه است که با حل کردن آن
فرکانس طبیعی بدون بعد ارتعاشات آزاد بدست می‌آید.

۴- نتایج و بحث

در این قسمت، تاثیر پارامترهای مختلف شامل اثر مقیاس
کوچک بدون بعد، بستر پاسترناک، سرعت سیال، اثرات
تنشهای سطحی روی فرکانس طبیعی بدون بعد بررسی
می‌شود. در این تحقیق، خواص فیزیکی، هندسی، حرارتی
و مکانیکی نانو لوله سه جداره نیتريد بور به صورت زیر در
نظر گرفته شده است [۱۸ و ۱۹]:

در روابط (۶۸) تا (۷۶)، اندیس مربوط به هریک از نانو
لوله‌ها در بالا سمت راست حروف و داخل پرانتز آورده
شده‌است. به طور مثال $U^{(3)}$ نشان دهنده‌ی جایجایی
طولی در جداره‌ی سوم و $W^{(2)}$ نشان دهنده‌ی جایجایی
عرضی در جداره‌ی دوم است. همچنین در این روابط هر
کدام از شمارنده‌های i بیانگر معادله‌ی تعادل نانولوله در
این گره است. به بیان دیگر با تغییر i از ۱ تا N در
هر معادله، N معادله حاصل می‌شود. از آنجا که روابط
تعادل دارای ۹ معادله‌ی مجزا است (روابط (۶۸) تا (۷۶)).
لذا روابط (۶۸) تا (۷۶) به شکل ماتریسی زیر بدست می-
آید:

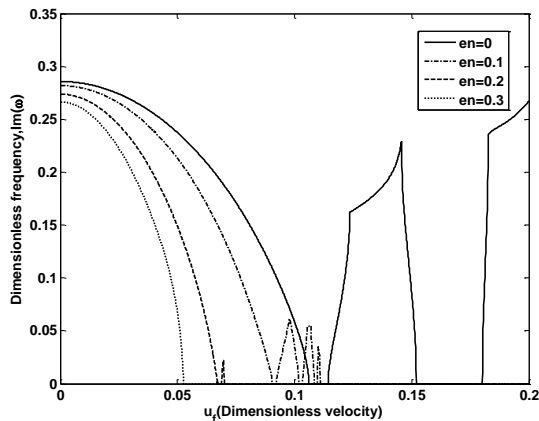
$$\left([K] + \Omega[C] + \Omega^2[M] \right) \{d_d\} = 0 \quad (77)$$

که $\{d_d\}$ ، $[M]$ ، $[C]$ و $[K]$ به ترتیب بردار
جایجایی مربوط به معادلات تعادل، ماتریس جرم، ماتریس
میرایی و ماتریس سختی هستند. لازم به ذکر است
ماتریسهای فوق $9N \times 9N$ می‌باشند.

در این تحقیق شرایط مرزی انتهایی نانو لوله سه جداره
نیتريد بور به صورت گیردار و به شکل زیر در نظر گرفته
می‌شود:

$$w(0, \tau) = w(l, \tau) = 0, \quad \frac{\partial w(0, \tau)}{\partial \zeta} = \frac{\partial w(l, \tau)}{\partial \zeta} = 0 \quad (78)$$

شرایط مرزی دو سر گیردار برای هر نانو لوله با استفاده از
روش مربع سازی دیفرانسیلی با جایگذاری روابط (۶۰)،
(۶۲) و (۶۳) در رابطه (۷۸) به صورت زیر نوشته می‌شود:



شکل ۳- تاثیر اثر مقیاس کوچک بدون بعد روی فرکانس طبیعی بدون بعد کوچک (e_n) بدون در نظر گرفتن تنشهای سطحی

شکل‌های ۳ و ۴ به ترتیب تاثیر اثر مقیاس کوچک بدون بعد (e_n) را روی قسمت‌های حقیقی و موهومی فرکانس بدون بعد نشان می‌دهند. می‌توان دریافت که محدوده پایداری با افزایش پارامتر غیرمحلی بی بعد شده ارینگن (e_n) کاهش می‌یابد. برای حالت محلی ($e_n = 0$) محدوده پایداری مطابق شکل ۳ بیشتر از وقتی است که پارامتر غیرمحلی ارینگن در نظر گرفته می‌شود چون این تحقیق در ابعاد نانو بحث می‌کند لذا محدوده پایداری واقعی باید در نظر گرفته شود که حدود پایداری حالت غیرمحلی کمتر از حالت محلی است. همانطور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود فرکانس طبیعی بدون بعد با افزایش سرعت سیال کاهش می‌یابد. هنگامیکه این فرکانس برابر صفر می‌شود، سرعت سیال را سرعت بحرانی نامند. به عبارت دیگر هنگامیکه فرکانس طبیعی برابر صفر شود پدیده کماتش اتفاق و سیستم واگرا شده و پایداری خود را از دست می‌دهد (شکل ۴). لازم به ذکر است که برای ترسیم شکل‌های ۳ تا ۶ از روابط (۶۸) تا (۷۶) و رابطه (۷۹) استفاده شده است.

$$\nu = 0.34, en = 0.01, h = 5nm,$$

$$r_1 = 11.43nm, r_2 = 16.43nm, r_3 = 21.43nm,$$

$$L = 20r_1, t_s = 1.7, A_i = \pi(r_i^2 - (r_i - h)^2), A_{si} = \frac{ht_s}{EA_i},$$

$$\bar{\mu} = 1.345e-12, T = 100^{\circ}C, \alpha_x = 1.2e-6/^{\circ}C$$

$$r_f = 6.43nm, I_f = \frac{\pi}{4}(r_f)^4, A_f = \pi r_f^2,$$

$$\tau_0 = 0.9108, \bar{\rho} = 0.28$$

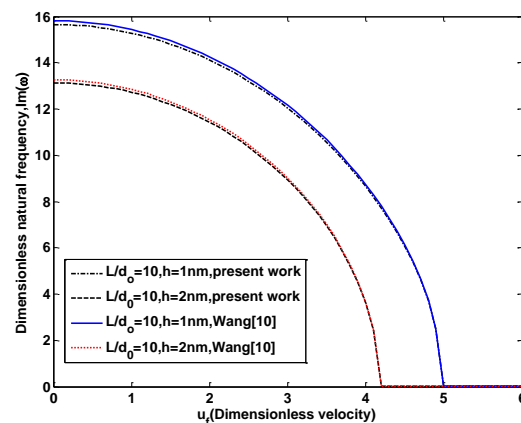
$$\bar{c}_1 = 1.33e11, \bar{c}_2 = \bar{c}_3 = 1.24e11,$$

$$\bar{k}_w = 1.41235, \bar{G}_p = 0.2,$$

$$f_1 = 0.043, f_1 = 0.040, f_1 = 0.037,$$

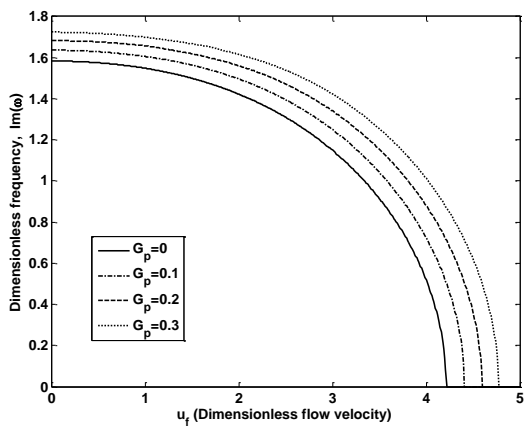
(۸۱)

نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج بدست آمده توسط وانگ [۱۰] در شکل ۲ مقایسه شده است. نتایج این تحقیق تطابق بسیار خوبی با نتایج بدست آمده توسط وانگ دارد. می‌توان مشاهده نمود که با افزایش ضخامت ناشی از تنش‌های سطحی محدوده پایداری و فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد.

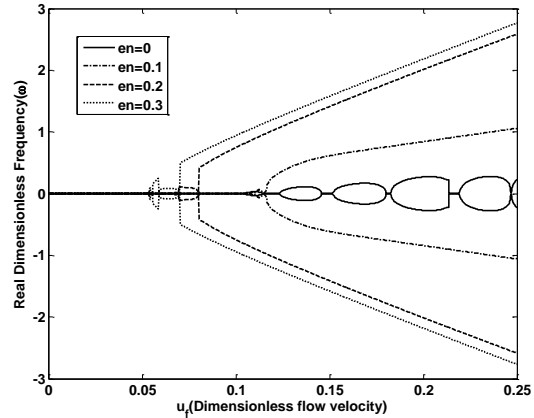


شکل ۲- تاثیر ضخامت ناشی از تنش‌های سطحی روی فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب سرعت سیال بدون بعد

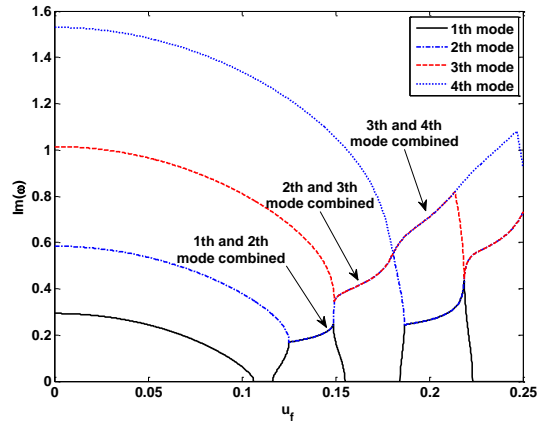
شکل‌های ۵ و ۶ به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی فرکانس بدون بعد را بر حسب سرعت سیال برای چهار مود اول ارتعاشی نشان می‌دهند. می‌توان مشاهده نمود که مودهای ارتعاشی در محدوده سرعت‌های سیال خاصی روی یکدیگر قرار می‌گیرند که به این پدیده فلاتر گویند. این پدیده نیز باعث ناپایداری سیستم می‌شود. به عنوان مثال در سرعت سیال بدون بعد ۰/۱۲۳، نمودار مود دوم بر مود اول منطبق شده و ناحیه فلاتر تشکیل و در سرعت بی بعد ۰/۱۴۶ دو نمودار از هم جدا می‌شوند. همچنین مشاهده می‌شود که مود اول در سرعت بی بعد ۰/۱۰۶۴ ناپایدار می‌شود در حالیکه در این سرعت مودهای بالاتر هنوز پایدارند و در واقع مودهای بالاتر در سرعت‌های بالاتر ناپایدار می‌شوند. لازم به ذکر است مودهای دوم، سوم و چهارم وقتی که سرعت سیال به ترتیب معادل یا بزرگتر از ۰/۱۲۵۲، ۰/۱۴۹۳ و ۰/۱۸۰۷ ناپایدارتر می‌شوند. قسمت حقیقی مود اول در $0.1064 \leq u_f \leq 0.1163$ غیر صفر است. وقتی که سرعت سیال معادل یا بزرگتر از ۰/۱۰۶۴ شود سیستم ناپایدار شده که واگرایی سیستم به خوبی در قسمت حقیقی مود اول در بازه فوق مشاهده می‌شود.



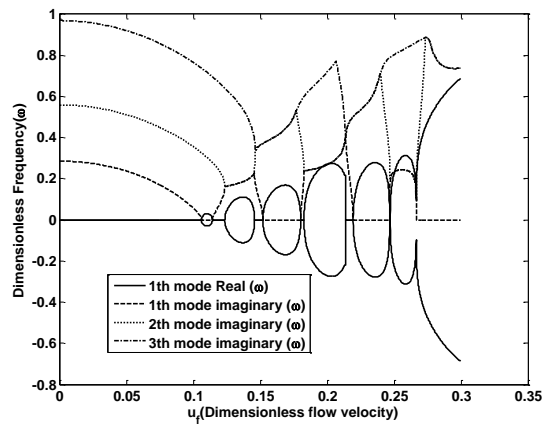
شکل ۷- تاثیر ثابت برشی پاسترناک بی بعد روی فرکانس طبیعی اول بی بعد حاوی جریان سیال



شکل ۴- تاثیر اثر مقیاس کوچک بدون بعد روی قسمت حقیقی فرکانس بدون بعد کوچک (ℓ_{II}) بدون در نظر گرفتن تنشهای سطحی

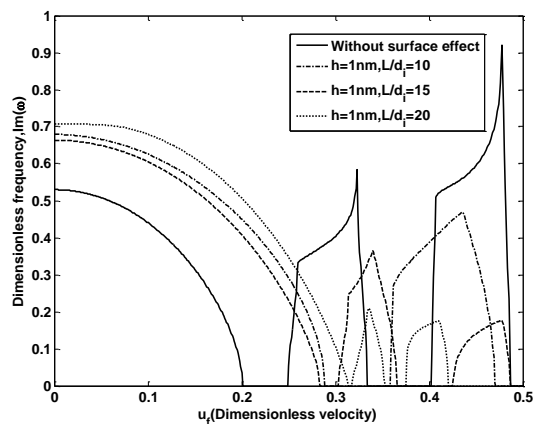


شکل ۵- فرکانس طبیعی بدون بعد بر حسب سرعت سیال برای چهار مود اول ارتعاشی



شکل ۶- قسمت حقیقی فرکانس بدون بعد بر حسب سرعت سیال برای چهار مود اول ارتعاشی

نشان می‌دهد که افزایش نسبت طول به قطر نانولوله باعث افزایش اثر سطح شده که این امر موجب افزایش محدوده پایداری می‌شود.



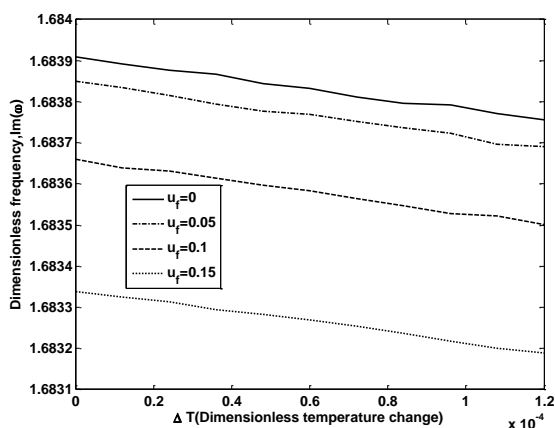
شکل ۹- تاثیر نسبت طول به قطر ناشی از تنشهای سطحی روی نانو لوله نیتريد بور سه جداره فرکانس طبیعی بدون بعد

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، تاثیر تنش‌های سطحی روی ارتعاشات خطی الکترو ترمو مکانیکی نانو لوله سه جداره‌ی نیتريد بور حاوی جریان سیال ویسکوز بر بستر الاستیک با استفاده از تئوری غیر محلی تیر اویلر - برنولی برای شرایط مرزی دو سر گیردار بررسی شد. محیط الاستیک روی لایه خارجی نانو لوله را با استفاده از مدل‌های ثابت فنری نوع وینکلر و ثابت برشی نوع پاسترناک شبیه سازی شده و نیروی واندروالس بین دو نانو لوله مجاور در نظر گرفته شد. با استفاده از روش انرژی و اعمال اصل هامیلتون، معادلات حرکت نانو لوله سه جداره نیتريد بور تحت تاثیر تنش‌های سطحی محاسبه شد. پس از بی بعد سازی معادلات حرکت، از روش مربع سازی دیفرانسیلی برای حل عددی معادلات استفاده گردید. نتایج حاصل از این تحقیق را می‌توان بصورت زیر جمع‌بندی نمود:

۱. فرکانس طبیعی بدون بعد با افزایش سرعت سیال کاهش می‌یابد.

شکل ۷ تاثیر ثابت برشی پاسترناک بی بعد روی فرکانس طبیعی بی بعد حاوی جریان سیال را نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود با افزایش ثابت برشی نوع پاسترناک فرکانس طبیعی بی بعد افزایش یافته، لذا محدوده پایداری سیستم افزایش می‌یابد و باعث افزایش سرعت بحرانی سیال می‌شود. این بحث از نظر فیزیکی هم قابل توجه بوده بدین معنی که با افزایش ثابت پاسترناک بستر نانولوله سفت‌تر شده که این امر باعث افزایش محدوده پایداری نانولوله حاوی جریان سیال می‌شود.



شکل ۸- تاثیر تغییرات دما روی فرکانس طبیعی اول بدون بعد نانو لوله نیتريد بور سه جداره حاوی جریان سیال

شکل ۸ تاثیر تغییرات دما روی فرکانس طبیعی بدون بعد نانو لوله نیتريد بور سه جداره حاوی جریان سیال را نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود محدوده پایداری با افزایش دما کاهش می‌یابد. این بدان معناست که افزایش دما باعث کاهش مقدار پیوندهای نیتريد و بور شده و موجب می‌شود فرکانس کاهش یابد. همچنین نرخ کاهش فرکانس بر حسب دما به ازای سرعت سیال مختلف تقریباً خطی است.

شکل ۹ تاثیر نسبت طول به قطر ناشی از تنشهای سطحی را روی فرکانس طبیعی بدون بعد نانو لوله نیتريد بور سه جداره حاوی جریان سیال نشان می‌دهد. نتایج این تحقیق

۸. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که فرکانس موهومی بیان کننده فرکانس طبیعی سیستم و محدوده پایداری بوده، در حالیکه قسمت حقیقی فرکانس نشان دهنده ناپایداری و واگرایی سیستم است. هدف اصلی در طراحی نانوسازه‌های مکانیکی حاوی جریان سیال، پایداری و تعادل سیستم می‌باشد که براساس سرعت سیال مجاز پایداری سیستم را می‌توان تضمین نمود. همچنین از نمودارهای قسمت حقیقی می‌توان محدوده سرعتی که باعث ناپایداری و واگرایی سیستم می‌شود را تشخیص داده و با استفاده از نونسورها اجازه نداد سرعت سیال خارج از محدوده پایدار قرار گیرد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از نظرات داوران محترم، تشکر و قدردانی می‌نمایند. همچنین آنها از ستاد ویژه توسعه فناوری نانو و معاونت پژوهشی دانشگاه کاشان طی قراردادی به شماره ۲۵۵۹۴۱/۳ به خاطر حمایت مالی تشکر و قدردانی می‌شود.

۲. هنگامیکه فرکانس طبیعی بدون بعد برابر صفر شود، در این حالت، پدیده کمانش اتفاق افتاده و سیستم واگرا می‌شود. همچنین سیستم پایداری خود را از دست می‌دهد.

۳. نتایج این تحقیق نشان داد که پدیده فلاتر باعث ناپایداری نانو لوله نیتريد بور سه جداره می‌شود.

۴. همانطور که در شکلها مشاهده شد فرکانس طبیعی بی بعد با افزایش ثابت برشی نوع پاسترناک افزایش یافته و محدوده پایداری سیستم افزایش می‌یابد.

۵. نتایج این تحقیق نشان داد که تاثیر تغییرات دما روی فرکانس طبیعی بدون بعد در ارتعاشات خطی نانو لوله نیتريد بور سه جداره ناچیز است.

۶. در شکلها مشاهده شد که محدوده پایداری با افزایش ضخامت تنشهای سطحی کاهش می‌یابد. همچنین سرعت بحرانی سیال نیز با افزایش این ضخامت کاهش پیدا می‌کند.

۷. تاثیر افزایش نسبت طول به قطر ناشی از تنشهای سطحی نیز باعث افزایش محدوده پایداری می‌شود.

۶- مراجع

- [1] Eringen, A.C. (1983). "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves". *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, pp. 4703-4710.
- [2] Ghorbanpour Arani, A., Shajari, A.R., Amir, S., Loghman, A. (2012). "Electro-thermo-mechanical nonlinear nonlocal vibration and instability of embedded micro-tube reinforced by BNNT conveying fluid". *Physica E*, Vol. 45, pp. 109-121.
- [3] Wang, CM., Zhang, YY., He, XQ. (2007). "Vibration of nonlocal Timoshenko beams". *Nanotechnology*, Vol. 18, pp. 9-18.
- [4] Mohammadimehr, M., Rahmati, A.H. (2013). "Small scale effect on electro-thermo-mechanical vibration analysis of single-walled boron nitride nanorods under electric". *Turkish Journal of Engineering & Environmental Sciences*, Vol. 37 (1), pp. 1-15.
- [5] Reddy, J.N. (2007). "Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams". *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, pp. 288-307.

- [6] Mohammadimehr M., Saidi, A.R., Ghorbanpour Arani, A., Arefmanesh, A., Han, Q. (2010). "Torsional buckling of a DWCNT embedded on Winkler and Pasternak foundations using nonlocal theory". *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 24 (6), pp. 1289-1299.
- [7] Khodami Maraghi, Z., Ghorbanpour Arani, A., Kolahchi, R., Amir, S., Bagheri, M.R. (2013). "Nonlocal vibration and instability of embedded DWBNNT conveying viscose fluid". *Composites: Part B*, Vol. 45, pp. 423-432.
- [8] Wang, L. (2012). "Surface effect on buckling configuration of nanobeams containing internal flowing fluid: A nonlinear analysis". *Physica E*, Vol. 44, pp. 808-812.
- [9] Gheshlaghi, B., Hasheminejad, S.M. (2011). "Surface effects on nonlinear free vibration of nanobeams". *Composites: Part B*, Vol. 42, pp. 934-937.
- [10] Wang, L. (2010). "Vibration analysis of fluid-conveying nanotubes with consideration of surface effects". *Physica E*, Vol. 43, pp. 437-439.
- [11] Samadi, F., Farshidianfar, A. (2011). "Free vibration of carbon nanotubes conveying viscous fluid using nonlocal Timoshenko beam model". *First International Conference on Acoustics and Vibration*, Amirkabir University of Tecknology, 21-22 Dec.
- [12] Kuang, YD., He, XQ., Chen, CY., Li, GQ. (2009). "Analysis of nonlinear vibrations of double-walled carbon nanotubes conveying fluid". *Computer Material Science*, Vol. 45, pp. 875-880.
- [13] Reddy, JN, Wang, CM. (2004). "Dynamocs of fluid-conveying beams: governing equations and finite element models". Singapore, Centre for Offshore Research and Engineering.
- [14] Mahmoud, A.A., Awadalla, R., Nassar, M.M. (2011). "Free vibration of non-uniform column using DQM". *Mechanics Research Communication*, Vol. 39, pp. 443-448.
- [15] Yücel, U., Boubaker, K. (2012). "Differential quadrature method (DQM) and Boubaker Polynomials Expansion Scheme (BPES) for efficient computation of the eigenvalues of fourth-order Sturm-Liouville problems". *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, pp. 158-167.
- [16] Haftchenari, H., Darvizeh, M., Darvizeh, A., Ansari, R., Sharma, C.B. (2007). "Dynamic analysis of composite cylindrical shells using differential quadrature method (DQM)". *Composite Structure*, Vol. 78, pp. 292-298.
- [17] Danesh, M., Farajpour, A., Mohammadi, M. (2012). "Axial vibration analysis of a tapered nanorod based on nonlocal elasticity theory and differential quadrature method". *Mechanics Research Communication*, Vol. 39, pp. 23-27.
- [18] Abdollahian, M., Ghorbanpour Arani, A., Mosallaie Barzoki, A.A., Kolahchi, R., Loghman, A. (2013). "Non-local wave propagation in embedded armchair TWBNNTs conveying viscous fluid using DQM". *Physica B*, Vol. 418, pp. 1-15.
- [19] Mohammadimehr, M., Saidi, A. R., Ghorbanpour Arani, A., Arefmanesh, A., Han, Q. (2011). "Buckling analysis of double-walled carbon nanotubes embedded in an elastic medium under axial compression using non-local Timoshenko beam theory". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 225 (2), pp. 498-506.
- [20] Rahmati, A.H., Mohammadimehr, M. (2014). "Vibration analysis of non-uniform and non-homogeneous boron nitride nanorods embedded in an elastic medium under combined loadings using DQM". *Physica B: Condensed Matter*, Vol. 440, pp.88-98.