

قیمت گذاری و بازاریابی در یک زنجیره تامین دوسطحی تحت چهار رویکرد نظریه بازی ها

عطا الله طالعی زاده^{۱*} و زاهده چراغی^۲

اطلاعات مقاله	چکیده
<p>واژگان کلیدی: قیمت گذاری، بازاریابی، نش، استکلبرگ، همکاری.</p>	<p>همکاری در تبلیغات یک استراتژی بازاریابی است که در آن خرده فروش، تبلیغات محلی را اجرا می کند و تولیدکننده بخشی از کل هزینه های آن را پرداخت می کند. در این تحقیق همکاری در تبلیغات و تصمیمات قیمت گذاری در یک زنجیره تامین دو سطحی بررسی می شود، که شامل یک تولیدکننده و یک خرده فروش است. تقاضا در این مدل تابعی از قیمت و تبلیغات است. به منظور مطالعه ی تصمیم گیری بهینه ی اعضای زنجیره تحت فرضیات مختلف، چهار استراتژی توسعه داده شده است. استراتژی ها شامل سه بازی غیرهمکاری شامل بازی های نش، تولیدکننده رهبر و خرده فروش رهبر و یک بازی همکاری هستند. محذب بودن توابع هدف در هر یک از حالت ها اثبات شده است. در پایان برای هر حالت یک مثال عددی ارائه و آنالیز حساسیت انجام شده است.</p>

۱- مقدمه

اهمیت و تاکید بر رقابت و همکاری در زنجیره های تامین باعث تجدید حیات نظریه بازی ها به عنوان یک ابزار مناسب برای تحلیل فعل و انفعالات در یک زنجیره تامین شده است. هر یک از اعضای زنجیره می تواند به صورت جداگانه برای خود برنامه های تبلیغاتی داشته باشد، اما رابطه تعاملی یعنی حالت برد- برد زمانی اتفاق می افتد که هر یک از آنها قادر باشند برای خود شریک انتخاب کنند تا بخشی از هزینه های تبلیغات را پوشش دهند. توسعه ی حجم تجارت و پیچیدگی روزافزون خرده فروشی، تغییر رویکرد در تبلیغات را می طلبد. امروزه خرده فروشان

قدرت بسیاری یافته و به دلیل افزایش و پیچیدگی رقابت، نقش فعال تری را در زمینه ی ارتباط با مشتریان ایفا می کنند. تبلیغات مشارکتی یکی از راه هایی است که تولیدکنندگان و توزیع کنندگان می توانند در برنامه های تبلیغاتی به صورت مشترک مشارکت کنند. این عمل نه تنها باعث کاهش در هزینه های تبلیغاتی شده بلکه موجب ایجاد پیوندی مهم با خرده فروشان محلی می شود و آثار بهتری از نام تجاری برای آنها به دنبال دارد. همکاری در تبلیغات یک توافق است، که در آن یک تولیدکننده با پرداخت یک بخش یا کل هزینه های تبلیغات محلی انجام شده توسط یک خرده فروش موافقت می کند. بنابراین متغیری به نام نرخ مشارکت تعریف می شود که عبارت است از درصدی از هزینه های تبلیغات محلی که تولیدکننده با پرداخت آن موافق است. نظریه بازی های بدون همکاری و باهمکاری که تصمیم گیری متوالی یا

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: taleizadeh@ut.ac.ir

۱. استادیار، دانشکده مهندسی صنایع، پردیس دانشکده های فنی، دانشگاه

تهران

۲. دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب

عنوان یک وظیفه‌ی بنیادین در مدیریت زنجیره‌ی تامین، مورد توجه قرار گرفته‌است. جولاند و شوگان^۸ [۱۶، ۱۵]، ام‌سی‌گور و استیلین^۹ [۱۷]، موریسی^{۱۰} [۱۸]، اینجن و پاری^{۱۱} [۲۰، ۱۹، ۲۲، ۲۱] و چوی^{۱۲} [۲۴، ۲۳] هماهنگی کانال در زنجیره‌ی تامین دو سطحی را مورد بحث قرار داده‌اند. آنها این کار را با مکانیسم قیمت‌گذاری مشترک، و همچنین تعرفه‌ی دوبرخی و مقدار تخفیف انجام داده‌اند. تعدادی از مطالعات وجود دارند که تصمیمات قیمت‌گذاری و تبلیغات را به طور همزمان در یک هماهنگی زنجیره‌ی تامین در نظر گرفته‌اند. جورج‌سن و زاکور [۲۵] یک مدل بازی تفاضلی^{۱۳} را پیشنهاد کرده‌اند که در آن تصمیمات قیمت‌گذاری و تبلیغات را در یک زنجیره‌ی تامین دوسطحی، تحت دو حالت همکاری و غیرهمکاری در نظر گرفته‌اند. جورج‌سن و همکاران [۱۳] نقش رهبر را در یک کانال بازاریابی با یک تولیدکننده و یک خرده فروش در نظر گرفته‌اند، به نحوی که هر بازیکن، تبلیغات و سود حاشیه‌ای خود را کنترل می‌کند. در مدل آنها، تقاضای مصرف‌کننده متأثر از حسن نیت تبلیغات و قیمت خرده‌فروش است. جورج‌سن و زاکور [۲۶] تقاضای مصرف‌کننده را که وابسته به قیمت خرده‌فروش و سپس است، در یک مجموعه‌ی پویا مدل‌سازی کرده‌اند، و سپس نتایج استراتژی‌های هماهنگی را با همه‌ی آنهاپی که ناهماهنگ هستند، مقایسه کرده‌اند. یو^{۱۴} و همکاران [۲۷]، مدل ایستای هوآنگ و همکاران [۹] را که به تجزیه و تحلیل نقش تبلیغات با همکاری در هماهنگی زنجیره‌ی تامین با استفاده از مدل‌های نظریه‌ی بازی‌ها پرداخته‌اند، توسعه داده است. آنها این کار را با توجه به تقاضای حساس به قیمت انجام داده‌اند، و تاثیر تخفیف مستقیم از سوی تولیدکننده به مشتری را، که ممکن است در یک کانال هماهنگ اتفاق بیفتد، مورد مطالعه قرار داده‌اند.

همزمان چند بازیگر را در نظر می‌گیرد، ابزاری است که برای حل این مسئله به کار برده می‌شود. اگر بین بازیکنان مذاکره‌ای صورت گیرد و توافقی هم به وجود آید و اجرا شود، به آن «بازی با همکاری» می‌گویند. اما اگر بین بازیکنان مذاکره‌ای وجود نداشته باشد و یا به یک توافق قابل اجرا منجر نشود، آن را «بازی بدون همکاری» گویند.

۲- ادبیات تحقیق

هماهنگی در زنجیره تامین، یکی از موضوعاتی است که بسیاری از تحقیقات، بدون در نظر گرفتن حداکثرسازی سود هریک از اعضای کانال، بر روی آن تمرکز کرده‌اند [۱]. برگر^۱ [۲] اولین کسی بود که به بررسی مسئله‌ی تبلیغات با همکاری، با ارائه‌ی یک مدل ریاضی پرداخت. او نشان داد که تجزیه و تحلیل کمی پیشنهادی، می‌تواند در تعیین تصمیم‌گیری‌های بهینه به کار برده شود. یک رویکرد مشترک در ادبیات، برای تجزیه و تحلیل نقش تبلیغات با همکاری در هماهنگی زنجیره‌ی تامین، استفاده از مدل‌های نظریه‌ی بازی‌هاست. این مدل‌ها در دو دسته- ی ایستا و پویا توسعه یافته‌اند. دانت و برگر^۲ [۳]، برگن و جان^۳ [۴]، کیم و استیلین^۴ [۵]، کری و زاکور^۵ [۶، ۷]، هوآنگ و لی^۶ [۸]، هوآنگ و همکاران [۹] و لی و همکاران [۱۰] مدل‌های ایستا را بررسی کرده‌اند که در این مدل‌ها فعل و انفعالات بین اعضای زنجیره‌ی تامین در یک دوره، مورد بحث قرار می‌گیرند. جورج‌سن و زاکور^۷ [۱۱] و جورج‌سن و همکاران [۱۳، ۱۲] مدل‌های پویا را مورد بررسی قرار داده‌اند اما در بسیاری از این مطالعات انجام شده با وجود نقش اساسی نرخ مشارکت، از آن چشم پوشی کرده‌اند. برگر و همکاران [۱۴] این موضوع را در مسئله تبلیغات با همکاری در نظر گرفته‌اند. تعیین قیمت خرده فروش و عمده فروش در بسیاری از مطالعات، به

⁸Jeuland and Shugan

⁹McGuire and Staelin

¹⁰Moorthy

¹¹Ingene and Parry

¹²Choi

¹³Differential game

¹⁴Yue

¹Berger

²Dant and Berger

³Bergen and John

⁴Kim and Staelin

⁵Karray and Zaccour

⁶Huang and Li

⁷Jørgensen and Zaccour

وی [۳۲] با استفاده از دو رویکرد همکاری و غیرهمکاری تئوری بازی‌ها، چهار سناریو را شامل (۱) بازی نش (۲) بازی استکلبرگ- تولیدکننده رهبر (۳) بازی استکلبرگ- خرده‌فروش رهبر (۴) بازی همکاری، در نظر می‌گیریم. در حالی که زی و وی [۳۲] فقط دو استراتژی را تحت بررسی قرار داده‌اند. همچنین برای هر حالت یک مثال عددی ارائه می‌شود و مجموع حداقل سودهایی که اعضای زنجیره در بازی‌های غیرهمکاری ادعا می‌کنند با سود همکاری مقایسه می‌شود. در نهایت تحلیل حساسیتی برای هر یک از متغیرهای تصمیم نسبت به پارامترها ارائه می‌شود.

۳- تعریف مسئله

زنجیره‌ی تأمین شامل یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش را در نظر بگیرید. در این زنجیره تولیدکننده محصولاتش را به یک خرده‌فروش می‌فروشد، و خرده‌فروش تنها محصول تولیدکننده را به مشتریان می‌فروشد. تولیدکننده روی قیمت عمده‌فروشی w ، هزینه‌ی تبلیغات ملی A و نرخ مشارکت t تصمیم‌گیری می‌کند. از طرف دیگر خرده‌فروش در مورد قیمت خرده‌فروشی p و هزینه‌ی تبلیغات محلی a تصمیم می‌گیرد. فرض می‌کنیم تقاضای مشتری به شکل زیر است:

$$D(p, a, A) = D_0 n(x) \cdot g(p) \cdot h(a, A) \quad (1)$$

که در آنها D_0 تقاضای اولیه‌ی مشتری، $g(p)$ تاثیرات قیمت خرده‌فروش و $h(a, A)$ تاثیرات هزینه‌های تبلیغات را نشان می‌دهد. به منظور مدلسازی مسئله، پارامترها و متغیرهای تصمیم زیر استفاده شده‌اند.

متغیرهای تصمیم

p	: قیمت واحد خرده‌فروش
w	: قیمت واحد عمده‌فروش
A	: هزینه‌ی تبلیغات ملی
a	: هزینه‌ی تبلیغات محلی
t	: نرخ مشارکت
Π	: سود

ونگ^۱ و همکارانش [۲۸] بررسی کرده‌اند که سیاست‌های همکاری تبلیغات و سودهای اعضا چگونه تحت تاثیر رفتارهای مختلف رقابتی قرار می‌گیرند و سپس تعیین کرده‌اند که آیا شرکا انگیزه‌ای برای تغییر ساختار دارند یا نه. هی^۲ و همکاران [۲۹] یک زنجیره تأمین را با یک خرده‌فروش و یک تولیدکننده به عنوان یک بازی تفاضلی استاکلبرگ مدلسازی کرده است. در این بازی، تقاضا تابعی از قیمت خرده‌فروش و تبلیغات است. به گفته‌ی چوی^۳ [۲۳] توابع تقاضای متفاوت، منجر به نتایج متفاوت قابل ملاحظه‌ای می‌شوند. اس‌مرکوفاس‌کای و ژانگ^۴ [۳۰] قیمت‌گذاری و تبلیغات را در یک زنجیره‌ی تأمین دو عضوی در نظر گرفتند، که در آن تقاضای مشتری بستگی به قیمت خرده‌فروش و تبلیغات دارد. آنها با در نظر گرفتن تولیدکننده به عنوان رهبر، به تصمیم‌گیری‌های بهینه‌ی خرده‌فروش و تولیدکننده رسیده‌اند. زی و نیرت^۵ [۳۱] و زی و وی [۳۲] و سیداصفهان‌ی و همکارانش [۱] یک رویکرد مشابه را با توابع تقاضای متفاوت دنبال کرده‌اند. آنها نتایج بهینه‌ی بازی همکاری را با بازی‌های غیرهمکاری مقایسه کرده‌اند. سیداصفهان‌ی و همکاران [۱] و زی و نیرت [۳۱] چهار مدل بازی را بررسی کرده‌اند، که سه بازی غیرهمکاری و یک بازی همکاری است. در حالی که خی و وی [۳۲] فقط دو مدل بازی، شامل بازی همکاری و بازی تولیدکننده به عنوان رهبر را بررسی کرده‌اند. آئوست و بوسچر^۶ [۳۳] با توسعه‌ی مدل سیداصفهان‌ی و همکاران [۱] به تصمیمات قیمت‌گذاری و همکاری تبلیغات در یک زنجیره تأمین دوسطحی با یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش پرداخته‌اند. آنها با استفاده از تئوری بازی‌ها چهار استراتژی را بررسی کرده‌اند و سیاست‌های همکاری و غیر همکاری را با هم مقایسه کرده‌اند. در این تحقیق با بهره گرفتن از مطالعه‌ی زی و

¹Wang

²He

³Choi

⁴Szmerekovsky and Zhang

⁵Xie and Neyret

⁶Xie and Wei

⁷Aust and Buscher

پارامترها

 D_0 : تقاضای اولیه مشتری α_1 : حداکثر تقاضای محصول به ازای قیمت صفر β_1 : حساسیت قیمت k_1 : تاثیر تبلیغات محلی k_2 : تاثیر تبلیغات ملی c : هزینه تولیدکننده برای تولید یک واحد d : هزینه خریدفروش برای دسترسی به یک واحد

۳-۱- ساختار مدل

با توجه به مقاله‌ی خی و وی [۳۲] تاثیرات قیمت

خرده‌فروش و تاثیرات هزینه‌ی تبلیغات، به ترتیب به شکل زیر هستند:

$$g(p) = \alpha_1 - \beta_1 p ; \alpha_1, \beta_1 > 0 \quad (2)$$

$$h(a, A) = k_1 \sqrt{a} + k_2 \sqrt{A} ; k_1, k_2 > 0 \quad (3)$$

بنابراین با توجه به روابط (۱)، (۲) و (۳) تابع

تقاضای مدل به شکل زیر است:

$$D(p, a, A) = D_0(\alpha_1 - \beta_1 p)(k_1 \sqrt{a} + k_2 \sqrt{A}) \quad (4)$$

بنابراین توابع سود تولیدکننده، خرده‌فروش و کل

زنجیره در مدل به شکل زیر هستند:

$$\Pi_m(w, A, t) = D_0(w - c)(\alpha_1 - \beta_1 p) \quad (5)$$

$$\times (k_1 \sqrt{a} + k_2 \sqrt{A}) - A - ta$$

$$\Pi_r(p, a) = D_0(p - w - d)(\alpha_1 - \beta_1 p) \quad (6)$$

$$\times (k_1 \sqrt{a} + k_2 \sqrt{A}) - (1-t)a$$

$$\Pi_{sc}(p, a, A) = D_0(p - c - d)(\alpha_1 - \beta_1 p) \quad (7)$$

$$\times (k_1 \sqrt{a} + k_2 \sqrt{A}) - A - a$$

که اندیس‌های r, m و sc به ترتیب نشان‌دهنده‌ی

تولیدکننده، خرده‌فروش و کل زنجیره است. حال توابع

سود فوق تحت چهار رویکرد تئوری بازی‌ها، مدل‌سازی،

حل و مقایسه می‌شوند. در این مدل برای ساده شدن

محاسبات مطابق با مقاله‌ی زی و نیرت [۳۱] و زی و وی

[۳۲] از نرمالسازی استفاده می‌کنیم. بنابراین از آنجایی

که تابع تقاضا مثبت است شرایط $p < \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ باید برقرار

باشد. همچنین برای جلوگیری از نامنفی شدن تابع سود

زنجیره شرایط $\Pi_{sc} > 0 \Rightarrow p > c + d$ باید برقرار باشد. درنتیجه رابطه‌ی $c + d < \frac{\alpha_1}{\beta_1} \Rightarrow \alpha_1 - \beta_1(c + d) > 0$ را خواهیم

داشت. بنابراین برای ساده سازی از تغییر متغیرهای

$$p' = \frac{\beta_1}{\alpha_1}(p - (c + d)) \quad , \alpha_1' = \alpha_1 - \beta_1(c + d)$$

$$k_2' = D_0 \frac{\alpha_1'^2}{\beta_1} k_2 \quad \text{و} \quad k_1' = D_0 \frac{\alpha_1'^2}{\beta_1} k_1 \quad , w' = \frac{\beta_1}{\alpha_1}(w - c)$$

استفاده می‌کنیم. پس توابع سود در رابطه‌ی (۵)، (۶) و

(۷) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\Pi_m'(w', A, t) = w'(1 - p') \quad (8)$$

$$\times (k_1' \sqrt{a} + k_2' \sqrt{A}) - A - ta$$

$$\Pi_r'(a, p) = (p' - w')(1 - p') \quad (9)$$

$$\times (k_1' \sqrt{a} + k_2' \sqrt{A}) - (1-t)a$$

$$\Pi_{sc}'(p', a, A) = p'(1 - p') \quad (10)$$

$$\times (k_1' \sqrt{a} + k_2' \sqrt{A}) - a - A$$

که برای ساده شدن، علامت (') را در محاسبات برمی-

داریم.

۳-۲- بازی‌نش

در این بازی، تولیدکننده و خرده‌فروش قدرت تصمیم-

گیری یکسانی دارند و استراتژی‌های خود را به‌طور

مستقل و همزمان انتخاب می‌کنند. ازین رو مسائل

تصمیم‌گیری تولیدکننده و خرده‌فروش به‌طور جداگانه

حل می‌شود. بنابراین مسائل تولیدکننده و خرده‌فروش به

شرح زیر هستند:

$$\text{Max} \Pi_m(w, A, t) \quad (11)$$

$$= w(1 - p)(k_1 \sqrt{a} + k_2 \sqrt{A}) - A - ta$$

$$\text{s.t. } 0 \leq w \leq 1, 0 \leq A \text{ and } 0 \leq t \leq 1$$

$$\text{Max} \Pi_r = (p - w)(1 - p) \quad (12)$$

$$\times (k_1 \sqrt{a} + k_2 \sqrt{A}) - (1-t)a$$

$$\text{s.t. } w \leq p \leq 1 \text{ and } 0 \leq a$$

واضح است که مقدار بهینه‌ی t از نقطه‌نظر

تولیدکننده برابر با صفر است، چون در تابع هدف

تولیدکننده ضریب منفی دارد. همچنین تابع سود

تولیدکننده نسبت به w صعودی است. اما w نمی‌تواند

برابر با یک باشد، زیرا در این صورت سود تولیدکننده و

خرده‌فروش هر دو صفر می‌شوند چون اگر $p \geq w = 1$ آنگاه $p = 1 \Rightarrow \Pi_r = \Pi_m = 0$. بنابراین برای حل مسئله،

مطابق با مقاله‌ی جورج‌سن و زاکور [۲۵]، زی و نیرت

بنابراین در این قسمت جواب مسئله‌ی تصمیم‌گیری تولیدکننده با قرار دادن مقادیر بهینه‌ی p, a در تابع سود تولیدکننده محاسبه می‌شود.

قضیه ۲. مقادیر بهینه بازی تولیدکننده رهبر، خرده-

فروش پیرو که در آن $k = \frac{k_2^2}{k_1^2}$ است، عبارتند از:

$$w^{SM} = \frac{1}{\sqrt{16k^2 + 16k + 9} - 4k} \quad (20)$$

$$p^{SM} = \frac{(\sqrt{16k^2 + 16k + 9} - 4k) + 1}{2(\sqrt{16k^2 + 16k + 9} - 4k)} \quad (21)$$

$$t^{SM} = \frac{5 + 4k - \sqrt{16k^2 + 16k + 9}}{3 - 4k + \sqrt{16k^2 + 16k + 9}} \quad (22)$$

$$A^{SM} = \left(\frac{k_2}{4}\right)^2 \times \left(\frac{(\sqrt{16k^2 + 16k + 9} - 4k) - 1}{(\sqrt{16k^2 + 16k + 9} - 4k)^2}\right)^2 \quad (23)$$

$$a^{SM} = \left(\frac{k_1}{16}\right)^2 \left(\frac{(\sqrt{16k^2 + 16k + 9} - 4k) - 1}{\sqrt{16k^2 + 16k + 9} - 4k}\right)^2 \times \left(\frac{3 + (\sqrt{16k^2 + 16k + 9} - 4k)}{\sqrt{16k^2 + 16k + 9} - 4k}\right)^2 \quad (24)$$

اثبات. به پیوست ب مراجعه کنید.

۳-۴ - بازی خرده‌فروش رهبر

حال رابطه‌ی خرده‌فروش و تولیدکننده را در یک بازی متوالی غیر همکاری متوالی مدل می‌شود، که مدلسازی می‌کنیم. اولین قدم برای تعیین آن پیدا کردن بهترین پاسخ تولیدکننده است. با توجه به حل مسئله‌ی تولیدکننده در بازی نش بهترین پاسخ تولیدکننده که در مرحله‌ی دوم توالی است به صورت زیر بدست می‌آید:

$$t = 0 \quad (25)$$

$$w = \frac{p}{2} \quad (26)$$

$$A = \left(\frac{1}{2}k_2w(1-p)\right)^2 \quad (27)$$

[۳۱] و سیداصفهان‌ی و همکاران [۱] فرض می‌کنیم خرده‌فروش تا زمانی که حداقل سود حاشیه‌ای واحد را نداشته باشد، اقدام به فروش محصول نمی‌کند. بنابراین سود حاشیه‌ای واحد تولیدکننده را به عنوان حداقل سطح در نظر می‌گیریم و محدودیت قیمت عمده‌فروشی را به صورت $p - w \geq w \Rightarrow w \leq \frac{p}{2}$ می‌نویسیم. که در آن $p - w$ و w به ترتیب سود حاشیه‌ای واحد خرده‌فروش و تولیدکننده هستند. بنابراین مقدار بهینه‌ی w برابر با $\frac{p}{2}$ است.

قضیه ۱. مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم تحت سیاست نش عبارتند از:

$$p^N = \frac{2}{3} \quad (13)$$

$$w^N = \frac{1}{3} \quad (14)$$

$$t^N = 0 \quad (15)$$

$$A^N = \frac{1}{324}k_2^2 \quad (16)$$

$$a^N = \frac{1}{324}k_1^2 \quad (17)$$

اثبات. به پیوست الف مراجعه کنید.

۳-۳ - بازی تولیدکننده رهبر

در این بازی رابطه‌ی بین تولیدکننده و خرده‌فروش به عنوان یک بازی غیر همکاری متوالی مدل می‌شود، که تولیدکننده رهبر و خرده‌فروش پیرو است. به منظور بدست آوردن این تعادل ابتدا باید بهترین پاسخ پیرو که در مرحله‌ی دوم توالی است تعیین شود و سپس مسئله‌ی تصمیم‌گیری رهبر بر پایه‌ی پاسخ پیرو حل شود. بنابراین بهترین پاسخ خرده‌فروش با توجه به حل مسئله‌ی خرده‌فروش در سیاست نش به شکل زیر خواهد بود:

$$p = \frac{1+w}{2} \quad (18)$$

$$a = \left(\frac{k_1(1-w)^2}{8(1-t)}\right)^2 \quad (19)$$

قضیه ۴. مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم بازی همکاری

به صورت زیر است.

$$p^{co} = \frac{1}{2} \quad (34)$$

$$A^{co} = \left(\frac{1}{8}k_2\right)^2 \quad (35)$$

$$a^{co} = \left(\frac{1}{8}k_1\right)^2 \quad (36)$$

اثبات. به پیوست ت مراجعه شود.

مطابق با مقاله‌ی زی و نیرت [۳۱]، سیداصفهان‌ی و همکاران [۱] و آئوست و بوسچر [۳۳] فرض می‌کنیم دو بازیکن زمانی توافق به همکاری می‌کنند که سود آنها بیشتر از سود بازی‌های غیرهمکاری باشد. به این صورت که:

$$\Delta\Pi_m = \Pi_m^c - \Pi_m^{\max} \geq 0 \quad (37)$$

$$\Delta\Pi_r = \Pi_r^c - \Pi_r^{\max} \geq 0 \quad (38)$$

که Π_m^c و Π_r^c به ترتیب سود تولیدکننده و خرده-فروش در بازی همکاری را نشان می‌دهند و Π_m^{\max} و Π_r^{\max} به ترتیب بیشترین سود تولیدکننده و خرده‌فروش را در هر بازی غیرهمکاری دیگر نشان می‌دهند. زمانی که این نابرابری برقرار باشد، همکاری امکان‌پذیر است. اما این یک فرض بسیار محدود است. زیرا در واقع اگر هیچ شانس‌ی برای بدست آوردن ساختار مورد نظر بازیکنان وجود نداشته باشد، ممکن است راضی به سود کمتر باشند و توافق بر همکاری کنند. علاوه بر این تغییرات در کانالی با رهبر و پیرو، ممکن است در کوتاه مدت امکان‌پذیر نباشد [۳۳]. بنابراین برای سود کل زنجیره داریم:

$$\Delta\Pi_{m+r} = \Delta\Pi_m + \Delta\Pi_r = \Pi_{m+r}^c - \Pi_m^{\max} - \Pi_r^{\max} \geq 0 \quad (39)$$

سود کل همکاری با قرار دادن مقادیر بهینه‌ای که در قضیه ۴ آمده‌اند در تابع سود رابطه‌ی (۳۳) می‌تواند محاسبه شود. در حالی که برای پیدا کردن Π_m^{\max} و Π_r^{\max} ، لازم است نتایج بازی‌های دیگر را در بخش‌های ۳-۴، ۳-۳ و ۲-۳ با هم مقایسه کنیم. خلاصه‌ی مقادیر بهینه چهار استراتژی در جدول (۱) ارائه شده است.

پس بهترین جواب تولیدکننده را در تابع سود خرده-فروش در رابطه‌ی (۱۲) قرار می‌دهیم تا ببینیم خرده-فروش به عنوان رهبر چه تصمیمی می‌گیرد. بنابراین جواب مسئله‌ی تصمیم‌گیری خرده‌فروش با قرار دادن مقادیر بهینه t ، w و A در تابع سود خرده‌فروش محاسبه می‌شود.

قضیه ۳. مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم زمانی که خرده‌فروش رهبر است عبارتند از:

$$p^{SR} = \frac{1}{2} \quad (28)$$

$$w^{SR} = \frac{1}{4} \quad (29)$$

$$a^{SR} = \left(\frac{k_1}{8}\right)^2 \quad (30)$$

$$t^{SR} = 0 \quad (31)$$

$$A^{SR} = \left(\frac{k_2}{16}\right)^2 \quad (32)$$

اثبات. به پیوست پ مراجعه کنید.

۳-۵- بازی همکاری

در سه قسمت قبل سه بازی غیرهمکاری را مورد بررسی قرار دادیم. در این قسمت رابطه‌ی تولیدکننده و خرده‌فروش را به عنوان یک بازی همکاری بررسی می‌کنیم که در آن اعضای زنجیره توافق بر همکاری و افزایش سود کل سیستم دارند. بنابراین تابع سود کل زنجیره را در نظر می‌گیریم و با توجه به آن مقادیر بهینه را بدست می‌آوریم. بنابراین تابع هدف به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{p,a,A} \Pi_{sc} &= p(1-p)(k_1\sqrt{a} + k_2\sqrt{A}) - a - A \\ \text{s.t. } &0 \leq p \leq 1, 0 \leq a, A \end{aligned} \quad (33)$$

همانطور که از تابع هدف مشخص است، زمانی که تولیدکننده و خرده‌فروش همکاری می‌کنند فقط p ، A و a متغیرهای تصمیم‌گیری هستند، و متغیرهای w و t بر روی سود کل تاثیرگذار نیستند و تنها در تقسیم سود بین اعضا تاثیرگذارند.

۴- مثال عددی

پارامترهای مدل، $D_0=5$ ، $c=1$ ، $d=1$ ، $k_1=2$ و $k_2=3$ هستند. در جدول (۲) مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم در هر چهار حالت ارائه شده‌اند.

در بخش قبل مقادیر بهینه‌ی چهار بازی نش، استکلبرگ- تولیدکننده رهبر، استکلبرگ- خرده‌فروش رهبر و همکاری را بدست آوردیم، که مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم در هر بازی در جدول (۱) خلاصه شده‌اند. در این قسمت به یک مثال عددی می‌پردازیم. فرض می‌کنیم

جدول ۱. خلاصه‌ی مقادیر بهینه‌ی چهار استراتژی

متغیر	نش	استکلبرگ ۱	استکلبرگ ۲	همکاری
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k)+1}{2(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
w	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{16k^2+16k+9}-4k}$	$\frac{1}{4}$	-
A	$\frac{1}{324}k_2^2$	$\left(\frac{k_2}{4}\right)^2 \left(\frac{(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k)-1}{(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k)}\right)^2$	$\left(\frac{k_2}{16}\right)^2$	$\left(\frac{1}{8}k_2\right)^2$
a	$\frac{1}{324}k_1^2$	$\left(\frac{k_1}{16}\right)^2 \left(\frac{(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k)-1}{\sqrt{16k^2+16k+9}-4k}\right)^2 \left(\frac{3+(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k)}{\sqrt{16k^2+16k+9}-4k}\right)^2$	$\left(\frac{k_1}{8}\right)^2$	$\left(\frac{1}{8}k_1\right)^2$
t	0	$\frac{5+4k-\sqrt{16k^2+16k+9}}{3-4k+\sqrt{16k^2+16k+9}}$	0	-

جدول ۲. نتایج مثال عددی

	نش	استکلبرگ ۱	استکلبرگ ۲	همکاری
p	۰/۶۶۷	۰/۷۱۶۸	۰/۵	۰/۵
w	۰/۳۳۴	۰/۴۳۳۵	۰/۲۵	-
A	۰/۰۲۷۸	۰/۰۳۳۹	۰/۰۳۵۲	۰/۱۴۰۶
a	۰/۰۱۲۳	۰/۰۰۱۶	۰/۰۶۲۵	۰/۰۶۲۵
t	۰	۰/۵۰۷۵	۰	-
Π_m	۰/۰۵۲۴	۰/۰۴۲۹	۰/۰۶۵۹	-
Π_r	۰/۰۶۷۹	۰/۰۴۹۹	۰/۰۷۰۴	-
Π_{sc}	۰/۱۲۰۳	۰/۰۹۲۹	۰/۱۶۸۰	۰/۲۰۳۱

حداقل سودهایی را که هر دو طرف ادعا می‌کنند با هم جمع کنیم داریم $\Pi_m^{SR} + \Pi_r^{SR} = 0.1363 < \Pi_{m+r}^c = 0.2031$ مشاهده می‌شود که در اینجا حداقل سودهایی را که هر دو طرف ادعا می‌کنند کوچکتر از سود کل همکاری که بین دو بازیکن تقسیم می‌شود، است. بنابراین همکاری بین دو بازیکن وجود خواهد داشت. در صورت عدم همکاری سود هر دو بازیکن کمتر خواهد بود و عدم همکاری به نفع هیچ یک از بازیکنان نیست.

همانطور که در قسمت قبل گفته شد، دو بازیکن زمانی توافق بر همکاری دارند، که سود آنها بیشتر از سود بازی‌های غیرهمکاری باشد (روابط ۳۷ و ۳۸). در اینجا دو بازیکن زمانی به حداکثر سود می‌رسند که تولیدکننده رهبر باشد. پس با توجه به فرض ما هر دو بازیکن در فرایند چانه زنی حداقل به سودهای $\Pi_m = 0.0659$ و $\Pi_r = 0.0704$ پافشاری می‌کنند، در غیر این صورت انگیزه‌ای برای عدم همکاری نخواهند داشت. حال اگر

۴-۱- تحلیل حساسیت

در این قسمت، آنالیز حساسیتی به‌ازای مقادیر مختلف پارامترهای مربوط به تبلیغات به‌منظور بررسی تغییرات و تاثیر آنها روی متغیرهای تصمیم ارائه می‌شود. در جدول (۳) تحلیل حساسیت مربوط به بازی نش، در جدول (۴) تحلیل حساسیت مربوط به بازی استکلبرگ- تولیدکننده رهبر، در جدول (۵) تحلیل حساسیت مربوط به بازی استکلبرگ- خرده‌فروش رهبر و در جدول (۶) تحلیل حساسیت مربوط به بازی همکاری نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که افزایش k_1 ، باعث افزایش مقدار a در هر چهار بازی و کاهش مقدار p ، w ، A و t در بازی استکلبرگ- تولیدکننده رهبر خواهد شد. همچنین افزایش k_2 ، باعث افزایش مقدار A در هر چهار بازی می‌شود. در بازی استکلبرگ- تولیدکننده رهبر، افزایش k_2 موجب کاهش مقدار a و افزایش مقدار p ، w ، A و t خواهد شد. همانطور که مشاهده می‌شود متغیرهای تصمیم در سایر حالت‌ها نسبت به تغییر k_1 و k_2 ثابت هستند و درصد تغییراتشان صفر است. در بازی‌های غیرهمکاری سود تولیدکننده، خرده‌فروش و در نتیجه کل زنجیره با افزایش k_1 و k_2 افزایش پیدا می‌کند. همچنین در بازی همکاری با افزایش این پارامترها سود کل سیستم افزایش می‌یابد.

بر اساس جدول ۳، در بازی نش، p ، w و t نسبت به پارامترهای k_1 و k_2 حساس نیستند. A نسبت به k_1 حساس نیست اما با افزایش و کاهش k_2 خیلی حساس می‌شود و مقدار آن به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد. a نسبت به k_2 حساس نیست اما نسبت به k_1 خیلی حساس است و با افزایش و کاهش آن به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد. سود تولیدکننده با افزایش k_1 و k_2 حساس می‌شود. سود خرده‌فروش نسبت به k_1 حساس و نسبت به افزایش و کاهش k_2 خیلی حساس است. در نتیجه سود کل زنجیره نسبت به k_1 حساس است و نسبت به k_2 نسبتاً حساس است.

بر اساس جدول ۴، در بازی استکلبرگ- تولیدکننده رهبر، p ، w و t نسبت به پارامترهای k_1 و k_2 نسبتاً حساس هستند. A نسبت به k_1 نسبتاً حساس است اما نسبت به k_2 نیز خیلی حساس است و با افزایش و کاهش آن مقدار آن به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد. a نسبت به k_2 نسبتاً حساس است اما نسبت به k_1 خیلی حساس است و با افزایش و کاهش آن به ترتیب شدیداً افزایش و کاهش می‌یابد. سود تولیدکننده، خرده‌فروش و در نتیجه کل زنجیره مطابق نتایج نسبت به k_1 حساس و نسبت به افزایش و کاهش k_2 خیلی حساس هستند.

بر اساس جدول ۵، در بازی استکلبرگ- خرده‌فروش رهبر، p ، w و t نسبت به پارامترهای k_1 و k_2 حساس نیستند. A نسبت به k_1 حساس نیست اما نسبت به k_2 حساس است و با افزایش و کاهش آن مقدارش به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد. a نسبت به k_2 حساس نیست اما نسبت به k_1 خیلی حساس است و با افزایش و کاهش آن به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد. سود تولیدکننده نسبت به k_1 و k_2 خیلی حساس است. سود خرده‌فروش نسبت به k_1 حساسیت بسیار کمی دارد و نسبت به k_2 خیلی حساس است. در نتیجه سود کل زنجیره نیز نسبت به k_1 و k_2 خیلی حساس است.

بر اساس جدول ۶، در بازی همکاری، p نسبت به پارامترهای k_1 و k_2 حساس نیست. A نسبت به k_1 حساس نیست اما نسبت به k_2 خیلی حساس است و با افزایش و کاهش k_2 مقدار آن به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد. a نسبت به k_2 حساس نیست اما نسبت به k_1 خیلی حساس است و با افزایش و کاهش آن به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد. سود کل زنجیره نسبت به k_1 حساس و نسبت به k_2 نسبتاً حساس است. مطابق با فرضیات در نظر گرفته شده، دو بازیکن زمانی توافق بر همکاری دارند، که سود آنها بیشتر از سود بازی‌های غیرهمکاری باشد.

جدول ۳. نتایج تحلیل حساسیت در بازی نش

بازی نش									
	٪ تغییرات	p	w	A	a	t	Π_m	Π_r	Π_{sc}
$K_1=2$	+۵۰	.	.	.	۱۲۶	.	۵۹	۲۲/۸	۳۸/۶
	+۲۵	.	.	.	۵۷	.	۲۶/۵	۱۰/۳	۱۷/۴
	-۲۵	.	.	.	-۴۴	.	-۲۰/۶	-۸	-۱۳/۵
	-۵۰	.	.	.	-۷۴/۸	.	-۳۵/۱	-۱۳/۵	-۲۳
$K_2=3$	+۵۰	.	.	۷۷/۷	.	.	۴۱/۲	۶۳/۶	۵۳/۹
	+۲۵	.	.	۳۶	.	.	۱۹/۱	۲۹/۶	۲۵
	-۲۵	.	.	-۳۰/۶	.	.	-۱۶/۲	-۲۵	-۲۱/۱
	-۵۰	.	.	-۵۵/۸	.	.	-۲۹/۴	-۴۵/۵	-۳۸/۵

جدول ۴. نتایج تحلیل حساسیت در بازی استکلبرگ - تولیدکننده رهبر

بازی استکلبرگ - تولیدکننده رهبر									
	٪ تغییرات	p	w	A	a	t	Π_m	Π_r	Π_{sc}
$K_1=2$	+۵۰	-۱/۲	-۴	-۲/۱	۱۷۵	-۵/۳	۲۸/۷	۲۲/۸	۲۵/۴
	+۲۵	-۰/۷	-۲/۲	-۰/۹	۷۵	-۲/۹	۱۲/۶	۱۰/۴	۱۱/۴
	-۲۵	۰/۸	۲/۷	۱/۲	-۵۲/۹	۳/۴	-۹/۱	-۸/۶	-۸/۹
	-۵۰	۱/۸	۶	۲/۴	-۸۲/۷	۷/۴	-۱۴/۷	-۱۶	-۱۵/۴
$K_2=3$	+۵۰	۰/۸	۲/۷	۷۹/۹	-۱۸/۸	۳/۴	۶۱/۳	۶۲/۳	۶۱/۷
	+۲۵	۰/۴	۱/۵	۳۷/۲	-۱۲/۵	۱/۹	۲۸/۲	۲۹/۱	۲۸/۵
	-۲۵	-۰/۵	-۱/۸	-۳۱	۶/۳	-۲/۳	-۲۴	-۲۴/۹	-۲۴/۵
	-۵۰	-۱/۲	-۴	-۵۶/۳	۲۵	-۵/۳	-۴۲/۴	-۴۵/۳	-۴۴

جدول ۵. نتایج تحلیل حساسیت در بازی استکلبرگ - خرده‌فروش رهبر

بازی استکلبرگ - خرده‌فروش رهبر									
	٪ تغییرات	p	w	A	a	t	Π_m	Π_r	Π_{sc}
$K_1=2$	+۵۰	.	.	.	۱۲۵	.	۱۶۶/۸	.	۴۶/۵
	+۲۵	.	.	.	۵۶/۳	.	۱۰۱/۵	-۰/۱۴	۲۱
	-۲۵	.	.	.	-۴۳/۷	.	۶/۷	-۰/۱۴	-۱۶/۳
	-۵۰	.	.	.	-۷۵	.	-۲۲/۹	.	-۲۷/۹
$K_2=3$	+۵۰	.	.	۷۷/۶	.	.	۸۹/۷	۷۷/۶	۴۸/۸
	+۲۵	.	.	۳۶/۱	.	.	۶۷/۵	۳۶/۱	۲۲/۷
	-۲۵	.	.	-۳۰/۷	.	.	۳۱/۹	-۳۰/۷	-۱۹/۲
	-۵۰	.	.	-۵۵/۷	.	.	۱۸/۵	-۵۵/۷	-۳۴/۹

جدول ۶. نتایج تحلیل حساسیت در بازی همکاری

بازی همکاری					
	درصد تغییرات	p	A	a	Π_{sc}
$K_1=2$	+۱	•	•	۱۲۵	۳۸/۵
	+۰/۵	•	•	۵۶/۳	۱۷/۳
	-۰/۵	•	•	-۴۳/۷	-۱۳/۴
	-۱	•	•	-۷۵	-۲۳/۱
$K_2=3$	+۱	•	۷۷/۸	•	۵۳/۹
	+۰/۵	•	۳۶/۱	•	۲۵
	-۰/۵	•	-۳۰/۵	•	-۲۱/۱
	-۱	•	-۵۵/۵	•	-۳۸/۵

۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق همکاری در تبلیغات را همراه با تصمیمات قیمت‌گذاری در یک زنجیره‌ی تامین دو سطحی شامل یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش بررسی کردیم. تقاضا در این مدل تابعی از قیمت و تبلیغات است. چهار نظریه‌ی بازی، به‌منظور مطالعه‌ی اثر توازن قدرت زنجیره‌ی تامین بر تصمیم‌گیری بهینه‌ی اعضای زنجیره توسعه داده شد، که سه بازی غیرهمکاری شامل بازی‌های نش، تولیدکننده رهبر و خرده‌فروش رهبر و یک بازی همکاری در نظر گرفته شد. مشاهده شد که مجموع حداقل سودهایی که هر دو طرف ادعا می‌کنند کوچکتر از سود کل همکاری است، بنابراین همکاری بین دو بازیکن وجود خواهد داشت. از طرفی مشاهده شد که در چهار استراتژی تأثیر تبلیغات محلی و ملی (k_1 و k_2) بر روی قیمت‌ها و نرخ مشارکت بسیار کم بود و همچنین به این نتیجه رسیدیم که در هر چهار استراتژی، تبلیغات ملی بر سود تولیدکننده، خرده‌فروش و در نتیجه کل زنجیره تأثیرگذارتر از تبلیغات محلی است. در این تحقیق پیشنهاد می‌شود که استراتژی‌های همکاری و غیرهمکاری با توابع مختلف تقاضا توسعه داده شود و علاوه بر قیمت‌گذاری و تبلیغات، عوامل دیگری نیز در نظر گرفته شوند.

۶- پیوست‌ها

پیوست الف. اثبات قضیه ۱.

تابع سود تولیدکننده نسبت به A مقعر است، چون مشتق دوم تابع، نسبت به A منفی است.

$$\frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial A^2} = -\frac{1}{4} k_2 w (1-p) A^{-\frac{3}{2}} < 0 \quad (\text{الف } ۱)$$

بنابراین مقدار بهینه‌ی A از رابطه‌ی

$$\frac{\partial E[\Pi_m]}{\partial A} = \frac{1}{2} k_2 w (1-p) A^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0$$

آمد. بنابراین مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم مسئله‌ی تولیدکننده به صورت زیر هستند:

$$t^* = 0 \quad (\text{الف } ۲)$$

$$w^* = \frac{p}{2} \quad (\text{الف } ۳)$$

$$A^* = \left(\frac{1}{2} k_2 w (1-p) \right)^2 \quad (\text{الف } ۴)$$

برای حل مسئله‌ی خرده‌فروش متغیر z را به صورت

$$(1-p)(p-w)$$

$$p \leq w \leq 1$$

حال مشتق جزئی z نسبت به p برابر است با:

$$\frac{\partial z}{\partial p} = (1-p) - (p-w) = 0 \quad (\text{الف } ۵)$$

با جایگزینی عبارت (۱۸) و (۱۹) در تابع سود تولیدکننده، تابع سود تولیدکننده به صورت زیر تغییر می‌کند.

$$\max \Pi_m = w \left(\frac{1-w}{2} \right) \left(\left(\frac{k_1^2 (1-w)^2}{8(1-t)} \right) + k_2 \sqrt{A} \right) - \frac{k_1^2 t}{4(1-t)^2} \left(\frac{1-w}{2} \right)^4 - A \quad (۱ب)$$

s.t. $0 \leq A, 0 \leq w \leq 1, \text{ and } 0 \leq t \leq 1$

مقدار بهینه‌ی A و t از مشتق جزئی Π_m نسبت به A و t بدست می‌آید.

$$\frac{\partial \Pi_m}{\partial A} = \frac{k_2}{2\sqrt{A}} \left(\frac{1-w}{2} \right) w - 1 = 0 \quad (۲ب)$$

$$\Rightarrow A = \frac{k_2^2}{16} w^2 (1-w)^2$$

همچنین داریم:

$$\frac{\partial \Pi_m}{\partial t} = \left(\frac{wk_1^2}{2(1-t)^2} \right) \left(\frac{1-w}{2} \right)^3 - \frac{k_1^2}{4} \left(\frac{t+1}{(1-t)^3} \right) \left(\frac{1-w}{2} \right)^4 \quad (۳ب)$$

$$= \frac{\left(\frac{1-w}{2} \right)^3 k_1^2}{2(1-t)^2} \left[w - \frac{t+1}{4(1-t)} (1-w) \right] = 0$$

در رابطه‌ی (الف ۱۲) همواره $\frac{\left(\frac{1-w}{2} \right)^3 k_1^2}{2(1-t)^2} > 0$ است.

بنابراین مقدار t از رابطه‌ی $w - \frac{t+1}{4(1-t)} (1-w) = 0$ بدست خواهد آمد. پس،

$$t = \frac{5w-1}{3w+1} \quad (۴ب)$$

برای بدست آوردن قیمت عمده‌فروشی w باید از تابع سود تولیدکننده نسبت به w مشتق بگیریم. بنابراین معادله‌ی (ب ۱) را ساده‌سازی کرده و به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\max \Pi_m = \frac{k_1^2}{16(1-t)} w(1-w)^3 + \frac{k_2 \sqrt{A}}{2} w(1-w) - A - \frac{k_1^2 t}{64(1-t)^2} (1-w)^4 \quad (۵ب)$$

از Π_m در رابطه‌ی (ب ۵) نسبت به w مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم.

از معادله‌ی (الف ۵) مقدار $p = p_1$ برابر با $\frac{1+w}{2}$ است. دامنه‌ی z را با توجه به مقادیر مختلف p تعیین می‌کنیم به نحوی که اگر $p = 1$ باشد آنگاه $z = 0$ و همچنین $p = p_1 \Rightarrow z = \left(\frac{1-w}{2} \right)^2 > 0$ پس بیشترین مقدار z در $p = p_1$ بدست می‌آید و کمترین مقدار آن برابر با صفر است. بنابراین $0 \leq z \leq \left(\frac{1-w}{2} \right)^2$ است. در نتیجه مسئله‌ی خرده‌فروش را در رابطه‌ی (الف ۱۲) به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\max \Pi_r = z (k_1 \sqrt{a} + k_2 \sqrt{A}) - (1-t)a \quad (الف ۶)$$

s.t. $0 \leq z \leq \left(\frac{1-w}{2} \right)^2, 0 \leq a$

Π_r نسبت به z یک تابع صعودی است، چون $\frac{\partial \Pi_r}{\partial z} = (k_1 \sqrt{a} + k_2 \sqrt{A})$ است که یک مقدار مثبت و بزرگتر از صفر است. بنابراین مقدار بهینه‌ی z برابر با $\left(\frac{1-w}{2} \right)^2$ است. همچنین تابع سود تولیدکننده نسبت به a مقعر است، چون مشتق دوم تابع، نسبت به a برابر با $\frac{\partial^2 \Pi_r}{\partial a^2} = -\frac{1}{4} k_1 z a^{-\frac{3}{2}} < 0$ است. بنابراین مقدار بهینه‌ی a از رابطه‌ی $\frac{\partial \Pi_r}{\partial a} = \frac{1}{2} k_1 z a^{-\frac{1}{2}} - (1-t) = 0$ بدست خواهد آمد. در نتیجه مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم مسئله‌ی خرده‌فروش به صورت زیر هستند:

$$p^* = \frac{1+w}{2} \quad (الف ۷)$$

$$z^* = \left(\frac{1-w}{2} \right)^2 \quad (الف ۸)$$

$$a^* = \left(\frac{1}{2(1-t)} k_1 z \right)^2 \quad (الف ۹)$$

بنابراین با حل معادلات (الف ۲) تا (الف ۴) و (الف ۷)

تا (الف ۹) به تعادل $t^N = 0, w^N = \frac{1}{3}, p^N = \frac{2}{3}$

و $a^N = \frac{1}{324} k_1^2$ خواهیم رسید.

پیوست ب. اثبات قضیه ۲.

پیوست پ. اثبات قضیه ۳

با جایگزینی عبارت (۲۵)، (۲۶) و (۲۷) در تابع سود خرده‌فروش، مسئله‌ی تصمیم‌گیری خرده‌فروش به صورت زیر تغییر می‌کند.

$$\Pi_r = \frac{p}{2}(1-p) \left(k_1 \sqrt{a} + \frac{1}{4} D_0 k_2^2 p(1-p) \right) - a \quad (\text{پ} ۱)$$

$$s.t. \ 0 \leq p \leq 1 \text{ and } 0 \leq a,$$

برای حل این مسئله y را به صورت $y = \frac{p}{2}(1-p)$ تعریف می‌کنیم. برای تعیین دامنه‌ی y مشتق اول آن را نسبت به p حساب می‌کنیم و با مقادیر حدی مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{\partial y}{\partial p} = \frac{(1-p)}{2} - \frac{p}{2} = 0 \quad (\text{پ} ۲)$$

از رابطه‌ی (پ ۲) مقدار $p = p_1$ برابر با $\frac{1}{2}$ بدست خواهد آمد. دامنه‌ی y را با توجه به مقادیر مختلف p تعیین می‌کنیم. اگر $p = 0$ باشد، آنگاه $y = 0$ و همچنین $p = p_1 \Rightarrow y = \frac{1}{8} > 0$ پس بیشترین مقدار y در $p = p_1$ بدست می‌آید و کمترین مقدار آن برابر با صفر است. بنابراین $0 \leq y \leq \frac{1}{8}$ است. در نتیجه مسئله‌ی خرده‌فروش را در رابطه‌ی (۱۲) به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\text{Max } \Pi_r = y \left(k_1 \sqrt{a} + \frac{1}{2} D_0 k_2^2 y \right) - a \quad (\text{پ} ۳)$$

$$s.t. \ 0 \leq y \leq \frac{1}{8} \text{ and } 0 \leq a$$

چون Π_r یک تابع صعودی نسبت به y است، بنابراین مقدار بهینه‌ی y در $\frac{1}{8}$ است.

$$y^* = y_{\max} = \frac{1}{8} \quad (\text{پ} ۴)$$

برای بدست آوردن مقدار a ، ابتدا مشتق جزئی دوم تابع سود خرده‌فروش را نسبت به a بدست می‌آوریم.

$$\frac{\partial^2 \Pi_r}{\partial a^2} = -\frac{1}{4} k_1 y a^{-\frac{3}{2}} < 0 \quad (\text{پ} ۵)$$

بنابراین مقدار بهینه از مشتق اول بدست خواهد آمد:

$$\frac{\partial \Pi_m}{\partial w} = 8k_2(1-2w)(1-t)^2 \sqrt{A} + k_1^2(1-w)^3 t + k_1^2(1-4w)(1-w)^2(1-t) = 0 \quad (\text{ب} ۶)$$

مقدار بهینه‌ی A و t را در رابطه‌ی (ب ۶) جایگزین می‌کنیم.

$$\frac{\partial \Pi_m}{\partial w} = 32(1-2w) \left[\frac{(1-w)}{3w+1} \right]^2 \left(\frac{k_2^2}{4} w(1-w) \right) + k_1^2(1-4w)(1-w)^2 \left(\frac{2(1-w)}{3w+1} \right) + k_1^2(1-w)^3 \frac{5w-1}{3w+1} = 0 \quad (\text{ب} ۷)$$

معادله‌ی بدست آمده از رابطه (ب ۷) را به صورت یک معادله‌ی درجه دو بر حسب w نوشته و مقدار بهینه‌ی w را بدست می‌آوریم.

$$w^2(16k_2^2 + 9k_1^2) - w(8k_2^2) - k_1^2 = 0 \quad (\text{ب} ۸)$$

از آنجایی که $0 < w < 1$ است و با استفاده از رابطه‌ی $k = \frac{k_2^2}{k_1^2}$ مقدار بهینه‌ی w به صورت زیر است:

$$w = \frac{4k + \sqrt{16k^2 + 16k + 9}}{9 + 16k} \quad (\text{ب} ۹)$$

مقدار بهینه‌ی w را در روابط بدست آمده‌ی (۱۸)، (۱۹)، (ب ۲) و (ب ۴) قرار می‌دهیم. بنابراین مقادیر بهینه‌ی y زیر بدست خواهند آمد.

$$w^{SM} = \frac{1}{\sqrt{16k^2 + 16k + 9} - 4k}$$

$$p^{SM} = \frac{\left(\sqrt{16k^2 + 16k + 9} - 4k \right) + 1}{2 \left(\sqrt{16k^2 + 16k + 9} - 4k \right)}$$

$$t^{SM} = \frac{5 + 4k - \sqrt{16k^2 + 16k + 9}}{3 - 4k + \sqrt{16k^2 + 16k + 9}}$$

$$A^{SM} = \left(\frac{k_2}{4} \right)^2 \times \left(\frac{(\sqrt{16k^2 + 16k + 9} - 4k) - 1}{(\sqrt{16k^2 + 16k + 9} - 4k)^2} \right)^2$$

$$a^{SM} = \left(\frac{k_1}{16} \right)^2 \left(\frac{(\sqrt{16k^2 + 16k + 9} - 4k) - 1}{\sqrt{16k^2 + 16k + 9} - 4k} \right)^2 \times \left(\frac{3 + (\sqrt{16k^2 + 16k + 9} - 4k)}{\sqrt{16k^2 + 16k + 9} - 4k} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Max } \Pi_{sc} &= z(k_1\sqrt{a} + k_2\sqrt{A}) - a - A \\ \text{s.t. } 0 &\leq z \leq \frac{1}{4}, 0 \leq a, A \end{aligned} \quad (3\text{ت})$$

چون Π_{sc} نسبت به z یک تابع صعودی است، چون مشتق جزئی Π_{sc} نسبت به z یک مقدار مثبت است $\left(\frac{\partial \Pi_{sc}}{\partial z} = (k_1\sqrt{a} + k_2\sqrt{A}) > 0\right)$ بنابراین مقدار بهینه z برابر زیر است.

$$z^* = z_{\max} = \frac{1}{4} \quad (4\text{ت})$$

برای بدست آوردن مقادیر a و A ابتدا ماتریس هشین آن را بدست می آوریم.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi_{sc}}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 \Pi_{sc}}{\partial a \partial A} \\ \frac{\partial^2 \Pi_{sc}}{\partial a \partial A} & \frac{\partial^2 \Pi_{sc}}{\partial A^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-k_1 z}{4a\sqrt{a}} & 0 \\ 0 & \frac{-k_2 z}{4A\sqrt{A}} \end{bmatrix} \quad (5\text{ت})$$

چون ماتریس هشین در رابطه‌ی (۵) معین منفی است، مقادیر بهینه‌ی a و A از مشتق اول بدست می آیند. پس،

$$\frac{\partial \Pi_{sc}}{\partial a} = \frac{1}{2} k_1 z a^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0 \Rightarrow a = \left(\frac{1}{2} k_1 z\right)^2 \quad (6\text{ت})$$

$$\frac{\partial \Pi_{sc}}{\partial A} = \frac{1}{2} k_2 z A^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0 \Rightarrow A = \left(\frac{1}{2} k_2 z\right)^2 \quad (7\text{ت})$$

با توجه به معادلات (۲)، (۳)، (۴)، (۶) و (۷) مقادیر بهینه‌ی a ، A و p در بازی همکاری به صورت زیر بدست خواهند آمد.

$$p^{co} = \frac{1}{2} \quad (8\text{ت})$$

$$A^{co} = \left(\frac{1}{8} k_2\right)^2 \quad (9\text{ت})$$

$$a^{co} = \left(\frac{1}{8} k_1\right)^2 \quad (10\text{ت})$$

$$\frac{\partial \Pi_r}{\partial a} = \frac{1}{2} k_1 y a^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0 \Rightarrow a = \left(\frac{1}{2} k_1 y\right)^2 \quad (6\text{پ})$$

بنابراین مقادیر بهینه از بازی استکابرگ-خردهفروش رهبر به صورت $t^{SR} = 0$ ، $w^{SR} = \frac{1}{4}$ ، $p^{SR} = \frac{1}{2}$ و $A^{SR} = \left(\frac{k_2}{16}\right)^2$ و $a^{SR} = \left(\frac{k_1}{8}\right)^2$ هستند.

پیوست ت. اثبات قضیه ۴

برای حل این مسئله، z را به صورت زیر تعریف می کنیم و دامنه‌ی آن را با توجه به مشتق اول و مقادیر حدی تعیین می کنیم.

$$\begin{aligned} z &= p(1-p) \\ \text{s.t. } 0 &\leq p \leq 1 \end{aligned} \quad (1\text{ت})$$

مشتق اول (۱) نسبت به p به صورت زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial z}{\partial p} = (1-p) - p = 0 \quad (2\text{ت})$$

از معادله‌ی (۲) مقدار $p = p_1$ برابر با ۰.۵ است. دامنه‌ی z را با توجه به مقادیر مختلف p تعیین می کنیم. اگر $p = 0$ باشد، آنگاه $z = 0$ و همچنین $p = 1 \Rightarrow z = 0$ و $p = p_1 \Rightarrow z = \frac{1}{4} > 0$ مقدار y در $p = p_1$ بدست می آید و کمترین مقدار آن برابر با صفر است. بنابراین $0 \leq z \leq \frac{1}{4}$ است. در نتیجه مسئله‌ی را در رابطه‌ی (۲۱) به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

۷- مراجع

- [1] SeyedEsfahani, M.M., Biazaran, M., Gharakhani, M., 2011. "A game theoretic approach to coordinate pricing and vertical co-op advertising in manufacturer-retailer supply chains." *European Journal of Operational Research* 211 (2), 263–273.
- [2] Berger, P.D., 1972. Vertical cooperative advertising ventures. *Journal of Marketing Research* 9 (3), 309–312.
- [3] Dant, R., Berger, P., 1996. Modelling cooperative advertising decisions infranchising. *Journal of the Operational Research Society* 47 (9), 1120–1136.

- [4] Bergen, M., John, G., 1997. Understanding cooperative advertising participation rates in conventional channels. *Journal of Marketing Research* 34 (3), 357–369.
- [5] Kim, S.Y., Staelin, R., 1999. Manufacturer allowances and retailer pass-through rates in a competitive environment. *Marketing Science* 18 (1), 59–76.
- [6] Karray, S., Zaccour, G., 2006. Could co-op advertising be a manufacturer's counterstrategy to store brands? *Journal of Business Research* 59 (9), 1008–1015.
- [7] Karray, S., Zaccour, G., 2007. Effectiveness of coop advertising programs in competitive distribution channels. *International Game Theory Review* 9 (2), 151–167.
- [8] Huang, Z., Li, S., 2001. "Co-op advertising models in manufacturer-retailer supply chains: A game theory approach." *European Journal of Operational Research* 135 (3), 527–544.
- [9] Huang, Z., Li, S., Mahajan, V., 2002. An analysis of manufacturer-retailer supply chain coordination in cooperative advertising. *Decision Sciences* 33 (3), 469–494.
- [10] Li, S., Huang, Z., Zhu, J., Chau, P., 2002. Cooperative advertising, game theory and manufacturer-retailer supply chains. *Omega* 30 (5), 347–357.
- [11] Jørgensen, S., Zaccour, G., 2003b. A differential game of retailer promotions. *Automatica* 39 (7), 1145–1155.
- [12] Jørgensen, S., Sigue, S., Zaccour, G., 2000. Dynamic cooperative advertising in a channel. *Journal of Retailing* 76 (1), 71–92.
- [13] Jørgensen, S., Sigue, S., Zaccour, G., 2001. Stackelberg leadership in a marketing channel. *International Game Theory Review* 3 (1), 13–26.
- [14] Berger, P., Lee, J., Weinberg, B., 2006. Optimal cooperative advertising integration strategy for organizations adding a direct online channel. *Journal of the Operational Research Society* 57 (8), 920–927.
- [15] Jeuland, A., Shugan, S., 1983. Managing channel profits. *Marketing Science*, 239–272.
- [16] Jeuland, A., Shugan, S., 1988. Channel of distribution profits when channel members form conjectures. *Marketing Science*, 202–210.
- [17] McGuire, T., Staelin, R., 1983. An industry equilibrium analysis of downstream vertical integration. *Marketing Science* 2 (2), 161–191.
- [18] Moorthy, K., 1988. Strategic decentralization in channels. *Marketing Science* 7 (4), 335–355.
- [19] Ingene, C., Parry, M., 1995a. Channel coordination when retailers compete. *Marketing Science* 14 (4), 360–377.
- [20] Ingene, C., Parry, M., 1995b. Coordination and manufacturer profit maximization: The multiple retailer channel. *Journal of Retailing* 71 (2), 129–151.
- [21] Ingene, C., Parry, M., 1998. Manufacturer-optimal wholesale pricing when retailers compete. *Marketing Letters* 9 (1), 65–77.
- [22] Ingene, C., Parry, M., 2000. Is channel coordination all it is cracked up to be? *Journal of Retailing* 76 (4), 511–547.
- [23] Choi, S., 1991. Price competition in a channel structure with a common retailer. *Marketing Science*, 271–296.
- [24] Choi, S., 1996. Price competition in a duopoly common retailer channel. *Journal of Retailing* 72 (2), 117–134.
- [25] Jørgensen, S., Zaccour, G., 1999. Equilibrium pricing and advertising strategies in a marketing channel. *Journal of Optimization Theory and Applications* 102 (1), 111–125.
- [26] Jørgensen, S., Zaccour, G., 2003a. Channel coordination over time: Incentive equilibria and credibility. *Journal of Economic Dynamics and Control* 27 (5), 801–822.

- [27] Yue, J., Austin, J., Wang, M., Huang, Z., 2006. Coordination of cooperative advertising in a two-level supply chain when manufacturer offers discount. *European Journal of Operational Research* 168 (1), 65–85.
- [28] Wang, S.D., Zhou, Y.W., Min, J., Zhong, Y.G., 2011. Coordination of cooperative advertising models in a one-manufacturer two-retailer supply chain system. *Computers & Industrial Engineering* 61 (2011) 1053–1071.
- [29] He, X., Prasad, A., Sethi, S., 2009. Cooperative advertising and pricing in a dynamic stochastic supply chain: Feedback Stackelberg strategies. *Production and Operations Management* 18 (1), 78–94.
- [30] Szmerekovsky, J., Zhang, J., 2009. “Pricing and two-tier advertising with one manufacturer and one retailer.” *European Journal of Operational Research* 192 (3), 904–917.
- [31] Xie, J., Neyret, A., 2009. “Co-op advertising and pricing models in manufacturer–retailer supply chains.” *Computers & Industrial Engineering* 56 (4), 1375–1385.
- [32] Xie, J., Wei, J., 2009. “Coordinating advertising and pricing in a manufacturer–retailer channel.” *European Journal of Operational Research* 197 (2), 785–791.
- [33] Aust, G., Buscher, U., 2012. Vertical cooperative advertising and pricing decisions in a manufacturer–retailer supply chain: A game-theoretic approach. *European Journal of Operational Research* 223 (2012) 473–482.