

## مقایسه انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری تک‌فازی و دوفازی نانوسیالات در کانال متخلخل

طاہر ارمغانی<sup>۱\*</sup>، محمد جواد مغربی<sup>۲</sup> و محسن نظری<sup>۳</sup>

اطلاعات مقاله	چکیده
<p><b>واژگان کلیدی:</b> حالت‌های تک‌فازی و دوفازی، نانوسیالات، نفوذ براونی، اثرات ترموفورز.</p>	<p>در این پژوهش، انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری نانوسیالات در کانال متخلخل دو بعدی با شار حرارتی ثابت مورد بررسی قرار گرفته است. از روش‌های تک‌فازی و دوفازی برای مدل‌سازی انتقال حرارت نانوسیالات استفاده و نتایج عددی حاصل از این دو روش با هم مقایسه شده است. تأثیرات مهاجرت نانوذرات بر روی انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری نیز مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. جریان سیال کاملاً توسعه یافته فرض شده و تعادل حرارتی بین نانوسیال و فاز جامد برقرار است. در حالت کلی، کسر حجمی نانوذرات در کانال متخلخل دارای توزیع غیریکنواخت بوده و معادلات حاکم بر مساله مستقل از یکدیگر نمی‌باشند. معادلات حاکم به روش عددی تفاضل محدود حل شده و برای حل معادله داریسی برینکمن فورچهمر در حالت توسعه یافته از روش آشفستگی هموتوپی استفاده شده است. تاکنون حل تحلیلی این معادله گزارش نشده است و برای اولین بار در این مقاله آورده شده است. نتایج حل عددی، افزایش عدد ناسلت محلی را با کاهش عدد لوئیس نشان داده و روند مشابهی نیز برای عدد اشمیت مشاهده شده است. ضمناً تأثیرات عدد لوئیس، عدد اشمیت و نسبت نفوذ اصلاح شده بر روی کسر حجمی نانوذرات مورد بحث قرار می‌گیرد. انتقال حرارت محاسبه شده از روش تک‌فازی و دوفازی نیز مقایسه شده است.</p>

### ۱- مقدمه

نانوسیالات دارای قابلیت انتقال حرارت بیشتری بوده و دارای کاربردهای فراوانی مانند خنک‌کاری وسایل الکترونیکی، میکرومکانیک و مبدل‌های حرارتی می‌باشند. تاکنون محققین بسیاری انتقال حرارت نانوسیالات را در هندسه‌های مختلف از طریق آزمایشگاهی و عددی مورد مطالعه قرار دادند [۲-۷]. همچنین این محققین به بررسی اثرات افزودن نانوذرات به سیال پایه پرداخته‌اند و بهبود انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری نانوسیالات را نسبت به سیال پایه گزارش کرده‌اند.

برای حل عددی انتقال حرارت نانوسیالات یکی از روش‌های متداول روش تک‌فازی است. در روش تک‌فازی

نانوسیالات، نامی که اولین بار توسط چوی [۱] به دنیا معرفی شد، سوسپانسیون هستند که از دو بخش سیال پایه و نانوذرات تشکیل شده‌اند. سیالات پایه عموماً شامل آب، اتیلن گلیکول و روغن هستند. نانوذرات از جنس‌های مختلفی مانند اکسیدهای فلزی و دارای اندازه کوچک‌تر از ۱۰۰ نانومتر می‌باشند. در مقایسه با سیال پایه،

\* پست الکترونیک نویسنده مسئول: taahermaghani@yahoo.com

۱. دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مهدیشهر، گروه مکانیک، مهدیشهر، ایران  
۲. دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران  
۳. دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

اخیرا از معادلات محیط متخلخل و روابط مربوط به آن برای مدل‌سازی جریان نانوسیالات درون میکروکانال‌ها بهره برده‌اند [۱۳-۱۸].

بیوپزشکی: از نانوسیالات برای درمان طومارهای آسیب دیده که دارای دمای بالای ۴۳ درجه سلسیوس می‌باشند استفاده می‌شود. با توجه به این‌که بافت‌های زنده نمونه‌ای از محیط متخلخل می‌باشند بنابراین درک مفاهیم انتقال حرارت جابه‌جایی نانوسیالات در محیط متخلخل بیش از پیش احساس می‌شود. در این زمینه نیز مقالاتی توسط سالوم و همکاران [۱۹-۲۱] به چاپ رسیده است.

از معادلات بونگیورنو برای بررسی شروع انتقال حرارت جابجایی آزاد نانوسیالات در کانال حاوی ماده متخلخل توسط کوزنتسو و نیلد [۲۲] استفاده شده است. آن‌ها از معادله داری برای شبیه‌سازی جریان نانوسیالات استفاده کردند و شرط تعادل دمایی را بین جسم جامد و نانوسیال در نظر گرفتند. معادلات بی‌بعد بقا به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت. در ضرایب ظاهر شده علاوه بر پارامترهای بی‌بعد مدل بونگیورنو پارامترهای مربوط به محیط متخلخل نیز به چشم می‌خورد. چمخا و همکاران [۲۳] محیط متخلخل داری را با انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد بر روی استوانه دما ثابت به صورت عددی مورد بررسی قرار دادند. نانوسیال با جسم جامد در تعادل دمایی قرار داشت. نتایج عددی برای ضریب اصطکاک، انتقال حرارت و انتقال جرم براساس نسبت شناوری، حرکت براونی، اثرات ترموفورز و عدد لوئیس گزارش شد. نتایج نشان دادند که با افزایش اعداد بی‌بعد بویانسی و ترموفورز ضریب اصطکاک افزایش و انتقال حرارت و انتقال جرم کاهش می‌یابند. با افزایش عدد بی‌بعد براونی ضریب اصطکاک افزایش، انتقال حرارت کاهش و انتقال جرم افزایش پیدا می‌کند. با افزایش عدد بی‌بعد لوئیس ضریب اصطکاک افزایش، انتقال حرارت و انتقال جرم کاهش می‌یابند.

در اینجا بحث چالش برانگیز این است: دلایل پایداری نانوسیالات در محیط متخلخل چیست؟ نیلد و کوزنتسو در سال ۲۰۰۹ [۲۴] برای اولین بار موضوع انتقال حرارت نانوسیالات را درون محیط متخلخل مطرح کردند. نویسندگان در مقاله خود برای تاکید بر پایداری نانوسیالات درون محیط متخلخل و در تماس با جسم

برای کسر حجمی نانوذرات توزیع یکنواخت و ثابت فرض شده و خواص حرارتی و هیدرودینامیکی موثر نانوسیال براساس کسر حجمی ثابت در معادلات بقا جای‌گزین خواص سیال پایه می‌شوند. روش دیگری که مورد توجه محققین قرار دارد روش دوفازی است. در روش دوفازی معادله توزیع کسر حجمی به معادلات بقا افزوده می‌شود و کسر حجمی نانوذرات دارای توزیع غیریکنواخت می‌باشد. محققین بسیاری از روش‌های تک‌فازی و دوفازی برای حل جریان و انتقال حرارت نانوسیالات بهره برده‌اند [۸-۱۰]. بررسی‌ها نشان داده است که روش دوفازی نتایج دقیق‌تری را نسبت به روش تک‌فازی به دست می‌دهد و با نتایج آزمایشگاهی هم‌خوانی بهتری دارد.

بونگیورنو [۱۱]، هفت مکانیزم حرکتی بین نانوذرات و سیال پایه را بیان کرد و نشان داد که حرکت براونی (حرکت نانوذرات از غلظت زیاد به کم) و ترموفورز (حرکت نانوذرات از ناحیه دما بالا به دما پائین) مکانیزم‌های غالب و مؤثر بر انتقال حرارت نانوسیالات در رژیم آرام می‌باشند. بر این اساس این دو جمله در معادلات بقا وارد شدند و به مدل بونگیورنو<sup>۱</sup> مشهور شدند.

هیپات و کوثری [۱۲] از مدل بونگیورنو برای بررسی عددی اثرات مهاجرت نانوسیالات بر روی جریان و انتقال حرارت نانوسیالات جریان یافته درون لوله استفاده کردند. نتایج مطالعه آن‌ها نشان داد که مهاجرت ذرات نقش بسیار مهمی در افزایش ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی دارند و ضریب انتقال حرارت حاصل از مدل بونگیورنو نسبت به ضریب انتقال حرارت حاصل از روش تک‌فازی مقدار بیشتری را نشان می‌دهد. استفاده از نانوسیال در محیط متخلخل به صورت کاربردی در دو مورد گزارش شده است:

میکروکانال: از موارد استفاده میکروکانال‌ها می‌توان به خنک‌کاری تجهیزات الکترونیکی اشاره کرد. با توجه به خواص نانوسیالات، استفاده از آن برای سیستم‌های خنک‌کاری توسط محققین پیشنهاد شده است. محققین

<sup>۱</sup>Buongiorno's model

## ۲- معادلات حاکم

انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری در کانال متخلخل دوبعدی با شارحرارتی ثابت به‌صورت عددی مورد بررسی قرار گرفته است. برای حل عددی، مدل بونگیورنو به شرح زیر مورد استفاده قرار گرفته است. معادله داری برینکمن فورچهیمر در حالت توسعه یافته برای حل جریان آرام یک‌بعدی استفاده شده است.

$$\frac{\mu_f}{\varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\mu_f}{K} u - \rho_f F \frac{\varepsilon}{K^{\frac{1}{2}}} u^2 - \frac{dp}{dx} = 0 \quad (1)$$

معادلات انرژی و توزیع کسر حجمی نانوذرات به‌صورت زیر است:

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f u \cdot \nabla T = k_m \nabla^2 T + \varepsilon (\rho c)_p \left( D_B \nabla \phi \cdot \nabla T + \frac{D_T}{T_c} \nabla T \cdot \nabla T \right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} u \cdot \nabla \phi = D_B \nabla^2 \phi + \frac{D_T}{T_c} \nabla^2 T \quad (3)$$

که در آن  $k_m$  ضریب هدایت موثر محیط متخلخل است. حرکت براونی و ترموفورز در سمت راست معادله (۲) ظاهر شده‌اند. در مقاله نیلد و همکاران [۳۱] تلفات ویسکوزیته را با عدد برینکمن که به‌صورت  $\mu U^2 H / k \Delta T K$  تعریف می‌شود بیان کردند که در آن  $k$ ،  $\Delta T$  و  $K$  به‌ترتیب ضریب هدایت حرارتی، اختلاف دما و نفوذپذیری محیط متخلخل هستند. این عدد بی‌بعد در معادله (۱۵) مقاله نیلد و همکاران [۳۱] تشریح شده است. با آنالیز ابعادی و مقایسه مرتبه بزرگی، از جمله اتلاف ویسکوزیته که دارای مرتبه کوچکی است در مقایسه با جمله‌های دیگر می‌توان صرف‌نظر کرد. به‌عبارت دیگر وقتی اختلاف دمای بین دیواره و نانوسیال افزایش می‌یابد از اتلاف ویسکوزیته می‌توان صرف‌نظر نمود. این فرض برای مسائل انتقال حرارت که در آن شار حرارتی و یا دمای دیوار منبع غالب انتقال انرژی است فرض قابل قبولی است. متغیرهای بی‌بعد به‌صورت زیر هستند:

$$u^* = \frac{u}{u_0}, (x^*, y^*) = \frac{(x, y)}{H}, \phi^* = \frac{\phi}{\phi_0}$$

جامد و عدم‌تنشینی نانوذرات، و درنتیجه صحت معادلات حاکم به دو دلیل اشاره کردند:

۱- نانوذرات ذراتی بسیار کوچک هستند و در محیط متخلخل نیز با سیال پایه به‌حالت سوسپانسیون نانوسیال باقی می‌ماند.

۲- نانوذراتی که با مواد فعال سطحی (Surfactant) درون سیال پایه پراکنده می‌شوند به اندازه کافی در برابر خوشه‌ای شدن و ته‌نشینی درون محیط متخلخل مقاوم هستند.

علاوه بر این موارد درصد پایین کسر حجمی نانوسیال نگرانی‌های مربوط به ته‌نشینی نانوذرات را به حداقل می‌رساند.

در مقالات منتشره در سال‌های اخیر محققین بسیاری برای مدل کردن پدیده انتقال در محیط متخلخل از مدل تک‌فازی [۲۵-۲۷] و دو‌فازی [۲۸-۳۰] استفاده کرده‌اند. اما با توجه به گزارشات موجود استفاده از روش‌های دو‌فازی (شامل جملات براونی و ترموفورز) منطقی‌تر و به واقعیت فیزیکی مساله نزدیک‌تر است. نکته قابل ذکر این است که در مقالات منتشر شده جدید، حتی از روش‌های مسوسکوپیک (مانند LBM) در حالت دو‌فازی برای مدل‌سازی نانوسیالات استفاده شده است.

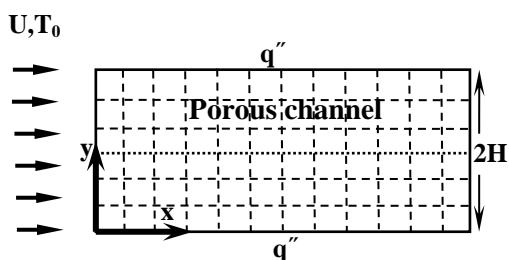
با توجه به موارد اشاره شده نیاز به تحقیق و مطالعه بر روی انتقال حرارت اجباری و نانوسیالات در محیط متخلخل احساس می‌شود. هدف از انجام این پژوهش، بررسی عددی اثرات حرکت و مهاجرت نانوذرات بر روی انتقال حرارت اجباری نانوسیالات درون کانال متخلخل و مقایسه آن با مدل‌سازی تک‌فازی نانوسیالات است. در این تحقیق فرض بر این است که جسم جامد و نانوسیالات در تعادل دمایی هستند. از معادله داری برینکمن فرچهیمر<sup>۱</sup> در حالت توسعه یافته هیدرولیکی برای شبیه‌سازی جریان استفاده می‌شود. از مدل بونگیورنو برای بررسی انتقال حرارت نانوسیال استفاده شده است. در این مقاله تأثیر پارامترهای مختلف مانند عدد لوئیس، عدد اشمیت و نفوذ براونی و ترموفورز بر روی انتقال حرارت و توزیع کسر حجمی بررسی می‌شوند.

<sup>1</sup>Darcy-Brinkman-Forchheimer equation

هستند.  $Le$ ، عدد لوئیس نانوسیال و  $\tau$  چگالی ذره اصلاح شده<sup>۳</sup> هستند.  $N_{bt}$  نسبت نفوذ اصلاح شده و بیان‌گر نفوذ براونی به نفوذ ترموفورز است. همانطور که از معادلات (۶) و (۷) مشخص است با حذف اثرات ترموفورز و براونی و فرض یکنواخت بودن کسر حجمی (حذف معادله (۷))، معادلات همان معادلات تک‌فازی نانوسیالات خواهد بود.

### ۳- تعریف هندسه و شرایط مرزی

همان‌طور که اشاره شد در این مقاله، انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری در کانال متخلخل دوبعدی با شارحرارتی ثابت به‌صورت عددی مورد بررسی قرار گرفته است. شکل ۱ شماتیکی از هندسه مسأله را بیان می‌کند.



شکل ۱- کانال متخلخل دو بعدی مورد مطالعه

شرایط مرزی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = -1, \varphi^* = 0, u^* = 0 \quad y^* = 0 \\ \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 1, \varphi^* = 0, u^* = 0 \quad y^* = 2 \\ x^* = 0 \quad T^* = 0, \varphi^* = 1 \quad (9) \end{aligned}$$

برای شرط مرزی خروجی، گرادیان طولی را که با توجه طولیل بودن کانال مقداری بسیار ناچیز است، صفر در نظر می‌گیریم:

$$x^* = 20 \quad \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 0, \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} = 0 \quad (10)$$

شرایط اولیه به‌صورت زیر است:

$$T^*(t^* = 0) = 0, \varphi^*(t^* = 0) = 1 \quad (11)$$

$$T^* = \frac{(T - T_0)k}{q''H}, \sigma = \frac{(\rho c)_m}{(\rho c)_f}, t^* = \frac{tu_0}{\sigma H}$$

$$p^* = \frac{P\mu u_0}{KH}$$

(۴)

که در آن  $u_0$  سرعت متوسط درون کانال و  $\varphi_0$  و  $T_0$  کسر حجمی و دمای نانوسیال در ورودی کانال و  $H$  نیم عرض کانال است. فرم بی‌بعد معادلات به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} - \frac{u^*}{Da} - \frac{\Delta}{\sqrt{Da}} u^{*2} - \frac{1}{Da} \frac{1}{H^2} \frac{dP^*}{dx^*} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{1}{\text{RePr}} \left[ \nabla^2 T^* + \frac{\tau}{Le} (\nabla \varphi^* \cdot \nabla T^*) \right] + \frac{\tau}{LeN_{bt}} (\nabla T_f^* \cdot \nabla T_f^*) \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} + \frac{1}{\varepsilon} u^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} = \frac{1}{\text{ReSc}} \left[ \nabla^2 \varphi^* + \frac{1}{N_{bt}} (\nabla^2 T_f^*) \right] \quad (7)$$

پارامترهای بی‌بعد به‌صورت زیر هستند:

$$Da = \frac{K}{H^2 \varepsilon} \quad (1-8)$$

$$\Delta = \frac{\varepsilon^3 Fu_0 H}{\nu_f} \quad (2-8)$$

$$N_{bt} = \frac{kD_B \varphi_0 T_0}{D_T q'' H} \quad (3-8)$$

$$Sc = \frac{\mu}{\rho D_B} \quad (4-8)$$

$$Le = \frac{\alpha_m}{D_B \varphi_0} \quad (5-8)$$

$$\text{Re} = \frac{u_0 H}{\nu} \quad (6-8)$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha_m} \quad (7-8)$$

$$\alpha_f = \frac{k_m}{(\rho c)_f} \quad (8-8)$$

$$\tau = \frac{\varepsilon (\rho c)_p}{(\rho c)_f} \quad (9-8)$$

در آن  $Da, \Delta, \text{Re}, Sc, \text{Pr}$  به‌ترتیب عدد پرانتل، عدد اشمیت، عدد رینولدز، پارامتراینرسی<sup>۱</sup> و عدد دارسی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>Inertia parameter

<sup>۲</sup>Darcy number

<sup>۳</sup>Modified particle-density

## ۴- روش حل معادلات حاکم

۴-۱- اساس روش آشفتگی هموتویی<sup>۱</sup>

برای بیان روش آشفتگی هموتویی (HPM) که اولین بار در سال ۱۹۹۸ توسط هی<sup>۲</sup> معرفی شد، معادله غیرخطی زیر در نظر گرفته می‌شود [۳۲]:

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega \quad (12)$$

که دارای شرایط مرزی زیر است:

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad r \in \Gamma \quad (13)$$

که در آن  $A$  عملگر عمومی مشتق،  $B$  عملگر مرزی،  $f(r)$  تابع تحلیلی معلوم و  $\Gamma$  محدوده حل در دامنه محاسباتی  $\Omega$  نامیده می‌شود. عملگر عمومی مشتق، به بخش خطی ( $L$ ) و بخش غیرخطی ( $N$ ) تقسیم می‌شود و با جای‌گذاری بخش خطی و غیرخطی در معادله (۱۲) داریم:

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (14)$$

با استفاده از تکنیک هموتویی [۳۳] و تعریف هموتویی (که به صورت  $U(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$  ساخته می‌شود) معادله زیر ارضا خواهد شد [۳۲].

$$H(v, p) = (1-p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad P \in [0, 1], \quad r \in \Omega \quad (15)$$

یا

$$H[v, p] = L(v) - L(u_0) + PL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0, \quad P \in [0, 1], \quad r \in \Omega \quad (16)$$

که در آن  $p \in [0, 1]$  یک پارامتر محاط‌کننده<sup>۳</sup> است،  $u_0$  تقریب اولیه از معادله (۱۵) می‌باشد که شرایط مرزی را ارضا می‌کند. از معادله (۱۵) یا (۱۶) نتیجه می‌شود.

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (17)$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (18)$$

با میل نمودن مقدار  $p$  از صفر به سمت یک،  $U(r, p)$  از  $u_0(r)$  به  $u(r)$  میل می‌کند. در توپولوژی<sup>۴</sup>، این فرآیند تغییرشکل<sup>۵</sup> نامیده می‌شود و جملات  $L(v) - L(u_0)$  و  $A(v) - f(r)$  هموتوپیک<sup>۶</sup> نامیده می‌شوند. در HPM پارامتر  $p$  به جای پارامتر کوچک در آشفتگی عمل می‌کند

علم مکانیک سیالات و انتقال حرارت به علت معادلات حاکم بر آن‌ها همواره با روش‌های حل معادلات غیرخطی حاکم بر فیزیک آمیخته بوده است. به علت ماهیت غیرخطی این‌گونه مسائل، یافتن جواب دقیق برای آن‌ها دشوار است و در برخی موارد از حل‌های تشابهی نیز استفاده می‌شود که در این‌گونه حل‌ها، معادلات مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند و اغلب به وسیله روش‌های تقریبی و نیمه تحلیلی حل می‌شوند. اگرچه امروزه با داشتن کامپیوترها با سرعت بالا این امر آسان‌تر شده است ولی روش‌های تحلیلی و عددی مزایا و معایبی دارند:

در روش‌های عددی معادلات جبری در فضای گسسته حل می‌شوند که اغلب با صرف هزینه و زمان همراه است. از نتایج عددی مشکل می‌توان یک فهم دقیق از معادلات غیرخطی داشت. همچنین مشکلات عددی در مواردی آشکار می‌شوند که معادلات غیرخطی دارای جواب‌های منحصر به فرد باشند و یا جواب‌های متعددی داشته باشند. روش‌های تحلیلی فراوانی برای حل معادلات غیرخطی وجود دارند که یکی از معروف‌ترین و قدیمی‌ترین آن‌ها روش آشفتگی است، که براساس وجود پارامترهای کوچک و بزرگ یا متغیرهایی که مقادیر آشفتگی نامیده می‌شود پایه‌گذاری شده است. در این روش، از مقادیر آشفتگی جهت انتقال یک مساله غیرخطی به زیرمجموعه‌ای نامتناهی از مسایل استفاده می‌شود و سپس مجموع جواب‌های چند معادله اول، جواب نهایی مساله را تقریب می‌زند.

یکی از مهمترین معایب روش آشفتگی، عدم وجود پارامترهای مناسب (بزرگ یا کوچک) در بسیاری از مسایل می‌باشد. ثانیاً مشخص نمودن پارامتر کوچک مناسب منجر به جواب ایده‌آل خواهد شد و این امر مستلزم مهارت کافی است. قابل ذکر است که روش آشفتگی هموتویی این مشکلات را ندارد.

2He  
3Embedding  
4Topology  
5Deformation  
6Homotopic

<sup>1</sup> Homotopy Perturbation Method

به خط با ایجاد ماتریس پنج قطری در دامنه محاسباتی جاروب شده و حل شدند.

مراحل حل عددی از قرار زیر است:

- ۱- حل معادله داریسی برینکمن فرچهیمر برای محاسبه سرعت ( $u$ ).
- ۲- استفاده از سرعت و حل معادله انرژی و محاسبه دما.
- ۳- استفاده از دما جدید در معادله کسر حجمی و محاسبه کسر حجمی جدید.
- ۴- محاسبه خطا، اگر
 
$$\left| \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta T} \right| > 10^{-10} \quad \text{و} \quad \left| \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta T} \right| > 10^{-10}$$
 بازگشت به مرحله ۲.

#### ۵- معتبرسازی برنامه عددی

در پژوهش حاضر و در تمام روش‌های تحلیلی و در اکثر روش‌های عددی برای مدل‌سازی جریان سیال در کانال حاوی ماده متخلخل از نسبت تخلخل ثابت و از ماده متخلخل هموزن استفاده می‌شود. به بیان دیگر، نسبت تخلخل در معادلات ثابت فرض می‌شود. ولی در کار تجربی ساخت محیط متخلخل کار دشواری بوده و ثابت نگه داشتن نسبت تخلخل محلی دشوار است. بنابراین جریان سیال و انتقال حرارت در مدل ساخته شده (تجربی) متفاوت از معادلات و مدل‌های حل شده است (به دلیل تفاوت ماده ساخته شده و مدل‌های ساده ریاضی موجود). در اکثر مدل‌های ریاضی و همچنین مدل مقاله حاضر اثری از تورتوسیتی نیست. ولی یک پارامتر مهم در مواد متخلخل ساخته شده تورتوسیتی، ارتباط حفره‌ها و مقدار PPI (Pore Per Inch) است. با توجه به مواردی که مختصراً ذکر شد، امکان مقایسه مدل‌های عددی با کارهای تجربی دشوار است. بنابراین اعتبارسنجی به کمک معادلات کلاسیک و دارای حل دقیق انجام شده است. زمانی که نسبت تخلخل برابر یک باشد کانال متخلخل همان کانال معمولی خواهد بود. برای بررسی صحت برنامه عددی، معادله انرژی با در نظر گرفتن جریان توسعه یافته در کانال و با صفر کردن ضریب نفوذ براونی و ترموفورز حل شد. برای عدد ناسلت در حالت کاملاً توسعه یافته

و جواب معادله (۱۱) به صورت توان‌هایی از  $p$  در نظر گرفته می‌شود.

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (19)$$

با میل نمودن  $p$  به سمت یک، سری فوق به جواب معادله (۱۱) میل می‌کند.

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (20)$$

سری فوق در اکثر مواقع همگراست. با این وجود نرخ همگرایی به عمل‌گر غیرخطی  $A(v)$  بستگی دارد. اخیراً معادلات غیرخطی  $kdv$  با استفاده از روش آشفتگی هموتوبی توسط ارمغانی و همکاران [۳۴] حل شده است. آن‌ها با ارائه حل معادلات از روش آشفتگی هموتوبی به عنوان ابزاری توانمند در حل معادلات غیرخطی نام بردند. معادله اندازه حرکت در ماده متخلخل (معادله ۴) برای اولین بار به کمک روش آشفتگی هموتوبی حل شده و در ادامه مقاله نمودار سرعت بر حسب عرض کانال حاصل از حل هموتوبی معادله داریسی برینکمن فرچهیمر ارائه شده است.

#### ۴-۲- روش عددی

برای حل معادلات حاکم (۶) و (۷) جمله‌های جابه‌جایی از روش تفاضل مرکزی گسسته‌سازی شده است و برای جمله نفوذ حرارتی نیز از تفاضل مرکزی مرتبه دوم استفاده شده است. گسسته‌سازی زمانی از روش کاملاً ضمنی انجام شد. جمله ترموفورز که به صورت  $\nabla T^* \cdot \nabla T^*$  در معادله انرژی ظاهر شده است توسط روشی که در مرجع [۳۵] آمده خطی‌سازی شده است. در این روش با محاسبه مشتق، عبارت غیرخطی به دو جمله تقسیم شده و یک جمله از تکرار حاضر و جمله دیگر از تکرار قبل جای‌گزین می‌شود. شبکه یکنواخت برای دامنه محاسباتی استفاده شده و تولید شبکه به روش جبری انجام شده است. برای دامنه محاسباتی یک شبکه  $300 \times 300$  در نظر گرفته شد و معادلات در این شبکه حل شدند.

سرعت به دست آمده از حل معادله داریسی برینکمن فرچهیمر به صورت مستقیم در معادله انرژی قرار گرفته و معادلات وابسته انرژی و توزیع کسر حجمی به صورت خط

## ۶- بحث و نتیجه گیری:

در این قسمت، نتایج عددی حاصل از حل معادلات حاکم (۵) الی (۷) مربوط به مقادیر

$$pr = 1, Da = \frac{1}{500}, \frac{\Delta}{\sqrt{Da}} = 20$$

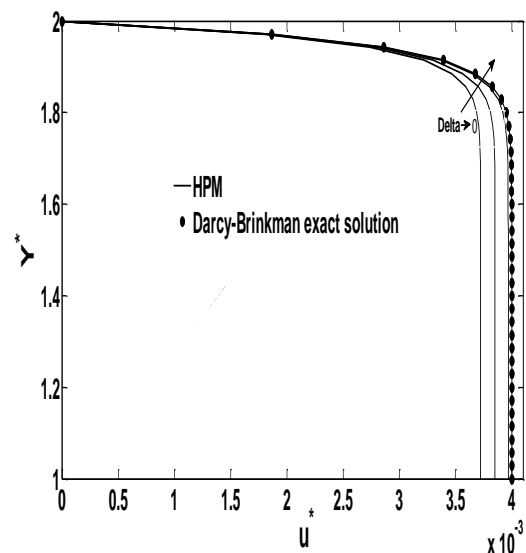
و همچنین

$$-2 = \frac{1}{Da} \frac{1}{H^2} \frac{dP^*}{dx^*}$$

است. شکل ۳ تأثیرات عدد

لوئیس را بر روی عدد ناسلت محلی و توزیع کسر حجمی نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، عدد لوئیس دارای مقادیر ۱۰۰ و ۱۰۰۰ است و نتایج برای اعداد ثابت  $N_{Bt} = 0.5$  و  $Sc = 100$  به دست آمده‌اند. عدد ناسلت محلی در شکل ۳-الف و توزیع کسر حجمی در مقطع خروجی در شکل ۳-ب نشان داده شده‌اند. نتایج نشان دادند که با افزایش عدد لوئیس شاهد کاهش عدد ناسلت هستیم. در معادله (۸-۵)، کاهش در ضریب نفوذ براونی ( $D_B$ ) منجر به افزایش عدد لوئیس می‌شود و با توجه به این‌که معادله (۷-۳) بیان‌گر نسبت نفوذ براونی به نفوذ ترموفورز است و این مقدار مقادری است ثابت، پس بایستی ضریب ترموفورز ( $D_T$ ) نیز کاهش یابد. از آن‌جا که معادله انرژی بسیار متأثر از عدد لوئیس است بنابراین با تغییر عدد لوئیس، ناسلت محلی و توزیع دما تغییرات قابل توجهی خواهند داشت. با افزایش عدد لوئیس، ضرایب مربوط به اثرات مهاجرت (نفوذ براونی و اثرات ترموفورز) به صفر نزدیک می‌شوند و رابطه (۷) همان معادله انرژی حالت تک‌فاز خواهد بود. همان‌طور که در شکل قابل مشاهده است عدد ناسلت محلی به دست آمده از روش دوفازی دارای مقدار بیشتری از عدد ناسلت محلی به دست آمده از روش تک‌فازی است. شکل ۳-ب نشان می‌دهد که با تغییرات عدد لوئیس توزیع کسر حجمی تغییر محسوسی نمی‌کند و آن به این خاطر است که عدد لوئیس به‌طور مستقیم در معادله کسر حجمی وارد نشده است. همچنین مهاجرت ذرات از ناحیه گرم دیواره به محیط سرد مرکز بخاطر نفوذ براونی و ترموفورز، در شکل مشاهده می‌شود.

حرارتی (در روش حاضر) عدد  $8/235$  به دست آمده است که در کتب انتقال حرارت (مرجع [۳۶]) نیز به آن اشاره شده است. همچنین وابستگی نتایج عدد ناسلت محلی در ناحیه توسعه یافته حرارتی به تعداد شبکه مورد بررسی قرارگرفت. مقادیر ناسلت محلی در ناحیه توسعه یافته کانال برای شبکه‌های  $100 \times 100$ ،  $200 \times 200$ ،  $300 \times 300$  و  $400 \times 400$  محاسبه شد و محاسبات، استقلال نتایج از تعداد شبکه را نشان دادند. معادله داری برینکمن فرچهیمر، در حالت حدی یعنی زمانی که ضریب  $u^{*2}$  به سمت صفر می‌رود ( $\Delta \rightarrow 0$ ) همان معادله داری برینکمن است که دارای حل تحلیلی نیز می‌باشد. در مراجع مختلفی می‌توان به حل تحلیلی این معادله دست یافت که به‌منظور خلاصه‌نویسی، در این مقاله ارائه نمی‌شود. شکل ۲ هم‌خوانی بسیار خوبی را بین نتایج حاصل از حل معادله داری برینکمن فرچهیمر در حالت حدی (به روش آشفتگی هموتویی) با حل تحلیلی معادله داری برینکمن نشان می‌دهد. همچنین نتایج حاصل از حل معادله داری برینکمن فرچهیمر با استفاده از روش هموتویی پرتوربیشن برای مقادیر مختلف  $\Delta$  رسم شده است.

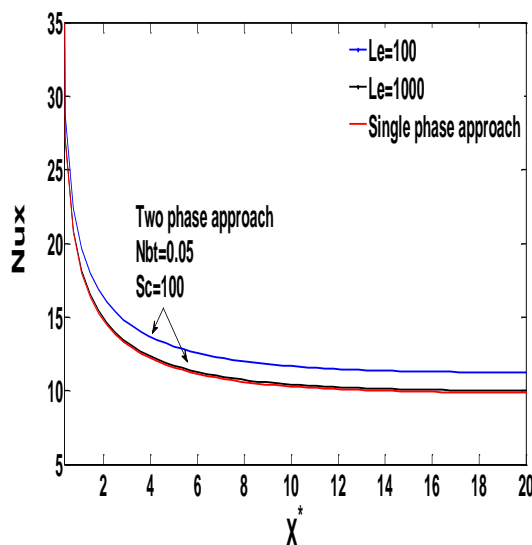


شکل ۲- مقایسه حل آشفتگی هموتویی معادله داری برینکمن فرچهیمر با حل تحلیلی معادله داری برینکمن.

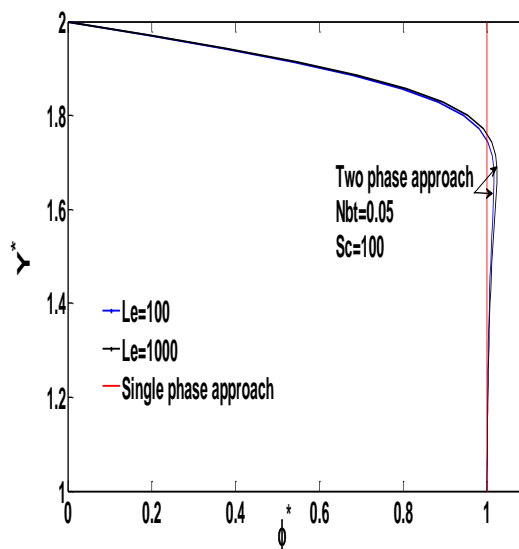
مهاجرت می‌کنند، به عبارت دیگر در ضریب نفوذ براونی ثابت، یا اعداد اشمیت و لوئیس ثابت، افزایش ضریب ترموفورز منجر به افزایش مهاجرت به مرکز کانال می‌شوند.

معادله (۸-۲) نشان می‌دهد افزایش ضریب ترموفورز باعث کاهش نسبت نفوذ اصلاح شده می‌شود بنابراین کاهش در نسبت نفوذ اصلاح شده باعث مهاجرت ذرات به سمت مرکز کانال می‌شود. شکل ۴-الف این مفهوم را به درستی نمایش می‌دهد، کاهش در نسبت نفوذ اصلاح شده منجر به افزایش کسر حجمی در ناحیه خاصی نزدیک مرکز کانال می‌شود.

شکل ۴-ب عدد ناسلت محلی را درون کانال متخلخل برای مقادیر مختلف نسبت نفوذ اصلاح شده برای حالت دوفازی و به شکل مقایسه‌ای با حالت تک‌فازی نمایش می‌دهند. نتایج نشان می‌دهند وقتی عدد لوئیس و عدد اشمیت مقادیر بزرگی نیستند، عدد ناسلت محلی و توزیع دما با تغییرات نسبت نفوذ اصلاح شده تغییرات محسوسی می‌کنند. همچنین اثرات نفوذ براونی و ترموفورز بر افزایش عدد ناسلت محلی در روش دوفازی نسبت به روش تک‌فازی قابل مشاهده است. با افزایش نسبت نفوذ اصلاح شده توزیع کسر حجمی به توزیع یکنواخت (حالت تک‌فاز) و عدد ناسلت حالت تک‌فاز نزدیک می‌شود.

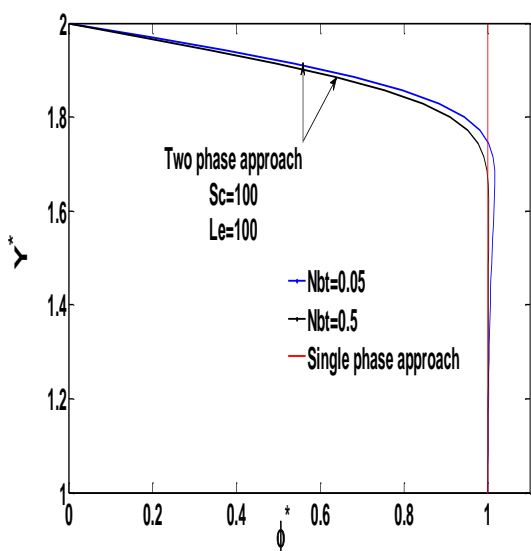


(الف)



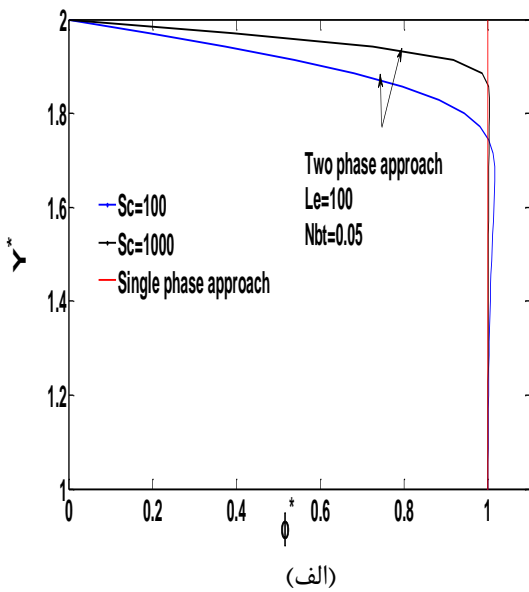
(ب)

شکل ۳-الف) عدد ناسلت در کانال متخلخل با عدد لوئیس متغیر در حالت‌های دوفازیو تک‌فازی، ب) توزیع کسر حجمی در مقطع خروجی

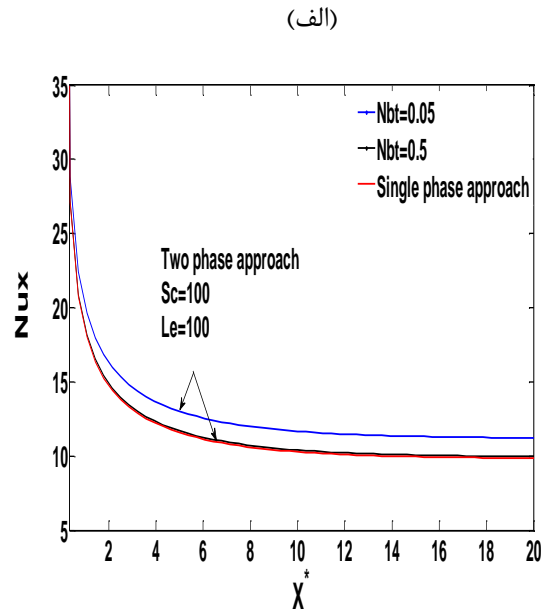


شکل ۴ تأثیرات ضریب نفوذ اصلاح شده ( $N_{bt}$ ) را بر روی عدد ناسلت و توزیع کسر حجمی بیان می‌کند. نسبت نفوذ اصلاح شده دارای مقادیر ۰/۵ و ۰/۱۰۵ می‌باشد و عدد اشمیت و لوئیس مقدار ثابت ۱۰۰ را دارند. شکل ۴-الف توزیع کسر حجمی را با تغییرات نسبت نفوذ اصلاح شده نشان می‌دهد. با توجه به این‌که دیواره بالاترین دما را دارد، بنابراین ذرات از دیواره به سمت مرکز کانال



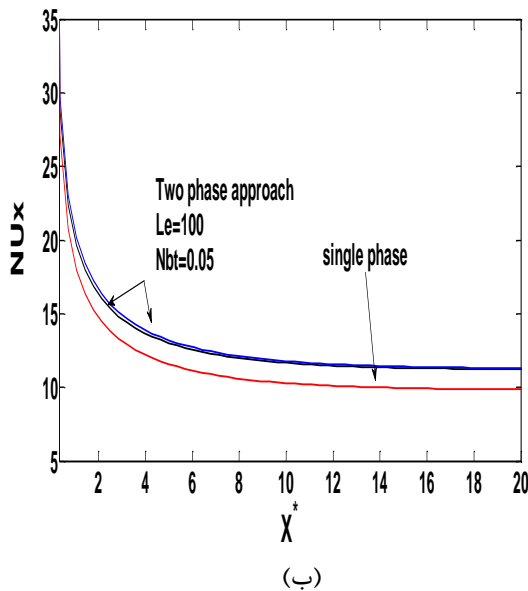


(الف)



(ب)

شکل ۴- الف) کسر حجمی بی بعد نانوذرات در مقطع خروجی در مقادیر مختلف نسبت نفوذ اصلاح شده، ب) عدد ناسلت محلی در حالت‌های دوفازی و تک‌فازی



(ب)

شکل ۵- الف) توزیع کسر حجمی در مقطع خروجی در اعداد اشمیت مختلف، ب) عدد ناسلت محلی به ازای عدد اشمیت در حالت‌های دوفازی و تک‌فازی

شکل ۵- ب) توزیع عدد ناسلت محلی را به ازای مقادیر مختلف عدد اشمیت نشان می‌دهند. با توجه به توضیحات مربوط به توزیع کسر حجمی و این‌که با افزایش عدد اشمیت توزیع کسر حجمی به توزیع همگن نزدیک می‌شود، در نتیجه جمله مربوط به نفوذ براونی بسیار ناچیز و قابل چشم‌پوشی است. بنابراین شکل ۵- ب) به روشنی اثرات ترموفورز را بر روی انتقال حرارت نشان می‌دهد.

شکل ۵ اثرات تغییر عدد اشمیت را بر روی توزیع کسر حجمی و انتقال حرارت نشان می‌دهد. نسبت نفوذ اصلاح شده و عدد لوئیس به ترتیب دارای مقادیر ۰/۰۵ و ۱۰۰ می‌باشند. وقتی عدد اشمیت افزایش می‌یابد سمت راست معادله (۷) کاهش یافته و در نتیجه تاثیرات حرکت براونی و ترموفورز کمرنگ می‌شود.

همان‌طور که در شکل ۵- الف ملاحظه می‌کنید، با افزایش عدد اشمیت، جمله جابه‌جایی جمله غالب‌تر می‌شود و توزیع کسر حجمی شباهت بیشتری را با توزیع کسر حجمی در حالت تک‌فازی (توزیع ثابت) دارد

## ۷- جمع‌بندی

دما (k)	$T$	
نفوذ ترموفورز ( $m^2s^{-1}$ )	$D_T$	
نفوذ براونی ( $m^2s^{-1}$ )	$D_B$	در این مقاله، انتقال حرارت جابجایی اجباری نانوسیالات در کانال متخلخل دوبعدی با شار ثابت از روش تک‌فازی و دوفازی بررسی و مقایسه شده است. همچنین تأثیرات مهاجرت ذرات بر روی انتقال حرارت جابجایی اجباری مورد بحث و بررسی قرار گرفت. معادلات حاکم به صورت تحلیلی و عددی حل شدند، معادله داری برینکمن فورچهیمر در حالت توسعه یافته از روش آشفتگی هموتویی حل شده و برای حل معادله انرژی و توزیع کسر حجمی از روش عددی استفاده شده است.
شار حرارتی	$q''$	
زمان (s)	$t$	
عدد رینولدز	$Re$	
عدد پرانتل	$Pr$	
ضریب نفوذ اصلاح شده	$N_{BT}$	نتایج، کاهش عدد ناسلت را به‌ازای افزایش عدد لوئیس نشان دادند. برای تغییرات ضریب نفوذ اصلاح شده نیز رفتار مشابهی مشاهده شد.
ضریب هدایت ( $Wm^{-1}k^{-1}$ )	$k$	
عدد لوئیس	$Le$	
محورهای مختصات (m)	$x, y$	
عدد اشمیت	$Sc$	
عدد داری	$Da$	
نیم عرض کانال (m)	$H$	توزیع کسر حجمی با تغییرات عدد لوئیس تغییر محسوسی نکرد و کاهش نسبت نفوذ اصلاح شده (به‌طور خلاصه افزایش اثر ترموفورز) باعث افزایش حضور ذرات در مرکز کانال شد.
<b>حروف یونانی</b>		
نسبت تخلخل	$\varepsilon$	
چگالی ( $kgm^{-3}$ )	$\rho$	در اعداد اشمیت بزرگ جمله غالب، جمله جابجایی است و کسر حجمی توزیعی شبیه توزیع حالت تک‌فازی دارد.
کسر حجمی	$\varphi$	همچنین با افزایش عدد اشمیت شاهد کاهش عدد ناسلت هستیم.
نسبت ظرفیت حرارتی	$\sigma$	
پارامتر اینرسی	$\Delta$	
نفوذ حرارتی موثر	$\alpha$	در نهایت روش دوفازی و خصوصاً مهاجرت نانوذرات افزایش انتقال حرارت اجباری کاملاً محسوسی را نسبت به انتقال حرارت اجباری منتج از روش تک‌فازی نشان می‌دهد.
نفوذ اصلاح شده	$\tau$	
<b>زیرنویس و بالانویسها</b>		
سیال	$f$	
محیط متخلخل	$m$	
نانوذره	$p$	
بی بعد	*	
<b>-علائم و نشانه‌ها</b>		
		$u$ سرعت ( $ms^{-1}$ )
		$K$ نفوذ پذیری ( $m^2$ )
		$P$ فشار ( $Nm^{-2}$ )

## ۸- مراجع

- [1] Choi, S.U.S. (1995). "Enhancing thermal conductivity of fluid with nanoparticles". Development and Applications of Non-Newtonian Flows, Vol. 66, pp. 99-105.
- [2] Maiga, S.E.B., Nguyen, C.T., Galanis, N., Roy, G. (2004). "Heat transfer behaviors of nanofluid in a uniformly heated tube: Super lattices and Microstructures", Vol. 35, pp. 453-462.

- [3] Zeinali Heris, S., Etemad, S. Gh., Nasr Esfahani, M. (2006). "Experimental investigation of oxide nanofluid laminar forced flow convective heat transfer". *Int. Comm. Heat and Mass transfer*, Vol. 33, pp. 529-535.
- [4] Santra, A.K., Sen, S., Chkroborty, M. (2009). "Study of heat transfer due to laminar flow of copper –water nanofluid through two isothermally heated parallel plate". *Int. J. of thermal science*, Vol. 48, pp. 391-400.
- [5] Kayhani, M.H., Nazari, M., Soltanzadeh, H., Heyhat, M.M., Kowsary, F. (2012). "Experimental analysis of turbulent convective heat transfer and pressure drop of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/water nanofluid in horizontal tube". *Micro&Nano Letters*, Vol. 7, PP. 223-227.
- [6] Kayhani, M.H., Soltanzadeh, H., Heyhat, M.M., Nazari, M., Kowsary, F. (2012). "Experimental study of convective heat transfer and pressure drop of TiO<sub>2</sub>/water nanofluid". *Int. Comm. Heat and Mass transfer*, Vol. 39, pp. 456-462.
- [7] Maghrebi, M.J., Armaghani, T., Talebi, F. (2012). "Effects of nanoparticle volume fraction in hydrodynamic and thermal characteristics of forced plane jet". *Thermal Science Journal*, Vol. 16, pp. 455-468.
- [8] Behzadmehr, A., Saffar-Avval, M., Galanis, N. (2007). "Prediction of turbulent forced convection of a nanofluid in tube with uniform heat flux using a two phase approach". *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 28, pp. 211-219.
- [9] Armaghani, T., Maghrebi, M.J., Talebi, F. (2009). "Effect of nanofluid volume concentration at laminar jet". *nanospain, Zaragoza, Spain*.
- [10] Lee, J., Mudawar, I. (2007). "Assessment of the effectiveness of nanofluid for single-phase and two-phase heat transfer in micro-channels". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, pp. 452-463.
- [11] Buongiorno, J. (2006). "convection Transport in nanofluid". *ASME J.H Heat transfer*, Vol. 128, pp. 240-250.
- [12] Heyhat, M.M., kowsary, F. (2010). "Effect of particle migration on flow and convective heat transfer of nanofluids flowing through a circular pipe". *ASME. J. Heat transfer*, Vol. 132, pp. 062401-9.
- [13] Kim, S.Y, Koo, J.M, Kuznesov, A.V. (2001). "effect of an isotropy in permeability and effective thermal conductivity on thermal performance of an aluminum foam heat sink". *numerical heat transfer A*, Vol. 40, pp. 21-36.
- [14] Kim S.Y, Koo J.M, Kuznesov A.V., (2003). "optimization of ping-pong heat sinks using an isotropic local thermal non equilibrium porous model model in a jet impinging channel". *numerical heat transfer A*, Vol. 440, pp. 771-787.
- [15] Abbassi, H., Aghanajafi, C. (2006). "Evaluation of heat transfer augmentation in a nanofluid- cooled microchannel heat sink". *J. fusion energy*, Vol. 25, pp. 187-197.
- [16] Tsai, T., Chein, R. (2006). "Performance analysis of nanofluid-cooled micro channel heat sinks". *int. J. heat fluid flow*, Vol. 28, pp. 1013-1026.
- [17] Ghazvini, M., Akhavan-behabadi, M.A., Esmaeili, M. (2009). "The effect of viscous dissipation on laminar nanofluid flow in a microchannel heat sink". *Ime. J. mech. eng. Sei* Vol. 223, pp. 2697-2706.
- [18] Ghazvini, M., Shokouhmand, H. (2009). "Investigation of a nanofluid-cooled micro channel heat sink using fin and porous media approaches". *Energy Convers. Management*, Vol. 50, pp. 2373- 2380.
- [19] Salloum, M., Mar, H., Weeks, D., Zhu, L. (2008). "Controlling nanoparticle delivery in magnetic nanoparticle hyper thermia for cancer treatment: experimental study in agarose gel". *Int. J. hyper thermia*, Vol. 24, pp. 337-345.
- [20] Salloum, M., Mar, H., Zhu, L. (2008). "Aum-vivo experimental study of emperawe elevations in animal use Sue during managncue nanoparticle hyperthermia". *Int.J. hyperthermia*, Vol. 24, pp. 589-597.
- [21] Salloum M., Mar H., Zhu L. (2009). "Enhancement in treatment planning for magnetic nanoparticle hyperhemia optimization of the heat absorption pattern". *Int. J. hyperthermia*, Vol. 25, pp. 309-321.

- [22] Kuznetsov, A.V., Nield, D.A. (2010). "The onset of double-diffusive nanofluid convection in a layer of saturated porous media". *Transp. Porous Media*, Vol. 83, pp. 401-4013.
- [23] Chakama, A., Gorla, R.S.R., Ghodeswar, K. (2010). "Non-similar solution for natural convection boundary layer flow over a sphere Embedded in a porous medium saturated with a nanofluid". *Trans. Porous. Med*, Vol. 83, pp. 197-206.
- [24] Nield, D.A., Kuznetsov, A.V. (2009). "Thermal instability in a porous medium layer saturated by ananofluid". *Int. J. Heat and Mass Transf.* Vol. 52, pp. 5796-5801.
- [25] Tham, L., Nazar, R. (2012). "Mixed convection flow about a solid sphere embedded in a porous medium filled with a nanofluid". *sains Malaysiana*. Vol. 41, pp.1643-1649.
- [26] Rosca, A.V., Rosca, N.C., Grosan, T., Pop, I. (2012). "Non-Darcy mixed convection from a horizontal plate embedded in a nanofluid saturated porous medium". *Int. J. Comm. Heat and Mass Transf.* Vol. 39, pp. 1080-1085.
- [27] Sun, Q., Pop, I. (2011). "Free convection in a triangle cavity filled with a porous medium saturated a nanofluid with flush mounted heater on the wall". *Int. J. Therm. Sci.* Vol. 50, pp. 2141-2153.
- [28] Rashad, A.M., Chamkha, A.J., Abdou, M.M.M. (2013). "Mixed convection flow of non-newtonian fluid from vertical surface saturated in a porous medium filled with a nanofluid". *J. of App. Fluid Mech.* Vol. 6, pp.301-309.
- [29] Chamkha, A.J., Abbasbandy, S., Rashad, A.M., Vajravelu, K. (2013). "Radiation effects on mixed convection about a cone embedded in a porous medium filled with nanofluid". *Meccanica*. Vol. 48, pp. 275-285.
- [30] Cheng, C.Y. (2012). "Free convection of non-newtonian nanofluids about a vertical truncated cone in a porous medium", *Int. J. Comm. Heat and Mass Transf.* Vol. 39, pp. 1348-1353.
- [31] Nield, D.A., Kuznetsov, A.V., Ming, X. (2003). "Thermally developing forced convection in a porous medium: parallel plate channel with walls at uniform temperature, with axial conduction and viscous dissipation effects". *Int. J. Heat and Mass Transf.* Vol. 46, pp. 643-651.
- [32] He, J.H. (1998). "An approximate solution technique and a perturbation technique for nonlinear problems", *comm. in nonlinear sci. and num. simulation*, Vol. 3, pp.92-97.
- [33] He, J.H., "Approximate analytical solution for speegage flow with fractional derivatives in porous media". *comp. meth. In app. Mech. And eng.* Vol. 167, 1998,pp. 57-58.
- [34] Goodarzian, H., Armaghani, T., Okazi, M. (2012). "Study of nonlinear Kdv type equations via homotopy perturbation method and variational iteration method". *Int. J. of Phys. Sci.*, Vol 7, pp. 234-240.
- [35] Patankar, S.V. (1980). "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow". Hemisphere, New York.
- [36] Bejan, A. (2003). "Convective heat transfer". third ed. John Wiley & Sons, Hoboken.