

جریان سیال غیر نیوتنی بر روی مرز با سرعت متغیر و در شرایط ناپایا؛ ارائه متغیر تشابهی و روش حل نوین

مازیار دهقان^۱، مصطفی میرزایی^۲، محمدصادق ولیپور^{۳*}، سیف‌الله سعدالدین^۴

اطلاعات مقاله	چکیده
<p>واژگان کلیدی: صفحه کشسان شرایط ناپایا سیال غیر نیوتنی تبدیلات تشابهی تفاضل محدود</p>	<p>جریان لایه‌ای یک سیال غیر نیوتنی تراکم ناپذیر ساکن بر روی یک صفحه کشسان متحرک در حالت ناپایا بررسی و متغیر تشابهی و متعاقب آن معادله حاکم بر جریان در دستگاه تشابهی، ارائه شده است. برای مدل‌سازی سیال غیر نیوتنی، از مدل قانون توانی استفاده شده است. سرعت صفحه کشسان تابعی از زمان و طول صفحه در نظر گرفته شده است. به کمک متغیر تشابهی ارائه شده، سه متغیر مستقل دستگاه فیزیکی (t, x, y) به تنها یک متغیر مستقل (η) تبدیل یافته است. به کمک تبدیل تشابهی، سیستم دستگاه معادلات پاره‌ای حاکم در دستگاه فیزیکی به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی در دستگاه تشابهی تبدیل و سپس توسط الگوریتم ارائه شده توسط نویسندگان مطالعه حاضر بر مبنای روش تفاضل محدود، حل گردیده است. در روش حل ارائه شده بر مبنای متغیر تشابهی پیشنهادی، نیازی به در نظر گرفتن تغییرات سه متغیر مستقل دستگاه فیزیکی نمی‌باشد و به کمک یک متغیر مستقل تشابهی می‌توان همزمان تغییرات تمامی متغیرهای مستقل را در نظر گرفت که از پیچیدگی حل بسیار کاسته می‌شود. برای دیدن نتایج این روش حل، اثرات پارامترهای سیال و جریان بر میدان سرعت در لایه مرزی بررسی شده است.</p>

۱- مقدمه

از مبدل‌های حرارتی و دستگاه‌های مربوط به فرایندهای شیمیایی از جمله کاربردهای این مسئله هستند. از کشش برای شکل دهی و رساندن صفحات به ضخامت مورد نظر استفاده می‌شود. در تمام این فرآیندها کیفیت محصول نهایی حاصل از کشش سطح به سرعت کشش، جریان و انتقال حرارت سیال در این فرآیند وابسته است.

یکی از مسائل پایه‌ای در انتقال سیال و انتقال حرارت، جریان بر روی یک صفحه در حال کشش در یک محیط نامحدود از سیال است. کرین [۱] از اولین کسانی بود که جریان سیال نیوتنی منشا گرفته از کشش صفحه‌ای که با

بسیاری از کاربردهای مهندسی با جریان و انتقال حرارت یک سیال غیرنیوتنی غیر قابل تراکم بر روی صفحه در حال کشش مواجه‌اند. اکستروژن صفحات پلیمری، کشش صفحات پلاستیکی، پوشش دهی سیم و فیبر، کشت کریستال و ساخت و خنک کاری شیشه، طراحی بسیاری

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: mvalipour@semnan.ac.ir

۱. دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان؛

۲. دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر؛

۳. استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان؛

۴. دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان.

حرارت در این گونه مسائل اهمیت زیادی دارد. برای مساله انتقال حرارت می‌توان به کار آبل و همکاران [۹] اشاره نمود. آنها سیال غیر نیوتنی (طبق قانون توانی) را تحت تاثیر میدان مغناطیسی و نیروی شناوری با ضریب هدایت حرارتی متغیر روی صفحه کشسان عمودی در حضور منبع حرارتی متغیر مورد بررسی قرار داده‌اند.

از آنجا که در فرآیند کشش تغییر سرعت صفحه رخ می‌دهد (مانند شروع به کار و شتاب گرفتن اولیه)، بررسی حالت گذرای آن از اهمیت بالایی برخوردار است. برخی پدیده جریان گذرا را به صورت یک تابع پله‌ای در سرعت صفحه در نظر گرفتند و به بررسی آن پرداختند. این حالت متداولترین و پایه‌ای‌ترین فرض برای ناپایایی سیستم می‌باشد. از آن جمله میتوان به آچاریا و همکاران [۱۰] و در ادامه کار او به چنگ و هوانگ [۱۱] اشاره کرد. چنگ و هوانگ [۱۱] جریان گذرای سیال نیوتنی روی صفحه تخت با دمش یا مکش در حضور یا عدم حضور منبع گرما بررسی نموده‌اند که مطالعه آنها بسیار شبیه و بر مبنای مطالعه آچاریا و همکاران [۱۰] بوده است. حالت واقعی‌تر این است که یک پروفیل پیوسته برای تغییرات سرعت بر حسب زمان در نظر گرفته شود مانند دانداپات و همکاران [۱۲] که در این مقاله هم از این چنین ایده‌ای برای پروفیل سرعت استفاده شده است.

اخیرا باچوک و همکاران [۱۳] به بررسی جریان و انتقال حرارت نانوسیال بر روی صفحه کشسان با دمش/مکش یکنواخت در حالت ناپایا پرداخته‌اند. مدل در نظر گرفته شده در تحقیق آنها، مدل نیوتنی برای سیال می‌باشد. ابراهیم و شانکر [۱۴] به بررسی جریان و انتقال حرارت سیال نیوتنی در لایه مرزی صفحه کشسان ناپایا پرداخته‌اند. تابع سرعت صفحه در مطالعه آنها و کار حاضر مشابه می‌باشد، با این تفاوت که مدل کار حاضر بر مبنای قانون توانی برای سیال نیوتنی تعمیم یافته (غیر نیوتنی) می‌باشد.

در مطالعه حاضر جریان گذرای سیال غیر نیوتنی بر مبنای قانون توانی روی یک صفحه کشسان با سرعت

سرعت خطی حرکت می‌کرد را مطالعه کرد. پس از او افراد زیادی این گونه جریانها را برای مسائل فیزیکی مختلف توسعه دادند. راجاگوپال و همکارانش [۲] این مسئله را در جریان یک سیاله مرتبه دوم بررسی کردند. در ادامه داناپات و گوپتا [۳] انتقال حرارت را بررسی کردند و یک راه حل تحلیلی برای جریان خود متشابه ارائه دادند. چپام [۴] اثر میدان مغناطیسی بر لایه مرزی حرارتی روی یک صفحه کشسان خطی را بررسی کرد. علی [۵] اثر مکش و تزریق در جریان لایه مرزی سیال توانی بر روی سطح متخلخل کشسان که در یک محیط از سیال ساکن کشیده می‌شد را مطالعه نمود.

مدلهای زیادی برای تشریح رفتار غیر نیوتنی سیالات استفاده می‌شود از بین آنها مدل توانی^۱ بیشتر مورد قبول واقع شده است [۶]. در کار حاضر نیز از مدل توانی برای مدل‌سازی سیال غیر نیوتنی استفاده شده است. اگرچه این مدل فقط یک رابطه نیمه تجربی ساده بین تنش و گرادیان سرعت است ولی با موفقیت در مورد سیالات غیر نیوتنی به کار رفته و ثابتهای مورد نیاز در این مدل به راحتی برای هر سیال مشخصی تعیین می‌شوند. این مدل ساده ترین و کاربردی ترین مدل برای بررسی سیالات غیر نیوتنی می‌باشد و کارهای زیادی در مورد لایه مرزی سیالات بر مبنای مدل توانی انجام شده است که در ادامه به برخی از آنها اشاره می‌شود. از کارهای اولیه در استفاده از مدل توانی برای سیالات غیر نیوتنی می‌توان به آکریووس و همکاران [۷] و شووالتر [۸] نام برد. آنها به بررسی جریان آزاد سیال غیر نیوتنی بر روی صفحه مسطح ساکن پرداخته‌اند و معادلات لایه مرزی برای سیال غیر نیوتنی را بر مبنای قانون توانی ساده و معادله بر مبنای متغیر تشابهی را برای اولین بار ارائه کرده‌اند. آنها تحلیل مسئله لایه مرزی هیدرودینامیکی سیال بر مبنای قانون توانی بر روی صفحه مسطح را انجام دادند ولی انتقال حرارت آن را بررسی نکردند در حالیکه انتقال

^۱ Power-law

که u و v سرعت در راستای x و y هستند. با توجه به فرضیات بیان شده که سیال در دوردست ساکن می‌باشد و برای صفحه، سرعت به صورت $U(t, x)$ در نظر گرفته شده است، شرایط مرزی را به این صورت می‌توان بیان نمود:

$$u(t, x, 0) = U(t, x) = \frac{ax}{1-bt}, \quad (2)$$

$$v(t, x, 0) = 0,$$

$$u(t, x, y) \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad y \rightarrow \infty$$

با توجه به پیچیدگی معادلات حل تحلیلی آن‌ها ممکن نیست. از طرفی هم برای حل عددی در نظر گرفتن تغییرات نسبت به یک متغیر (به جای سه متغیر) ساده‌تر و حل یک معادله تنها به جای دو معادله مرتبط به یکدیگر، روان‌تر است. بنابراین در ادامه سعی می‌شود که به کمک تبدیل دستگاه مختصات و استفاده از تبدیلات تشابهی، تعداد متغیرهای مستقل و تعداد معادلات حاکم بر جریان را کاهش داده و الگوریتمی برای حل آن ارائه شود.

۳- روش حل

۳-۱- تبدیلات تشابهی

به منظور ساده سازی معادلات، از متغیر تشابهی تعریف شده در رابطه (۳) استفاده می‌شود که برای تمامی انواع سیالات (نیوتنی و غیر نیوتنی) قابل استفاده است:

$$\eta = \frac{y}{x} (Re_x)^{\frac{1}{n+1}}, \quad (3)$$

$$\frac{u}{U} = f'(\eta)$$

در رابطه (۳) n توان غیر نیوتنی در مدل توانی و $n=1$ حالت خاص سیال نیوتنی را نشان می‌دهد. رابطه (۳) حالت کلی‌تری از تعریف پرانتل در رابطه با تغییر مختصات (تبدیلات تشابهی) است. Re نیز عدد رینولدز تعمیم یافته می‌باشد که به این صورت تعریف می‌شود:

$$Re_x = \frac{U^{2-n} x^n}{\nu} \quad (4)$$

متغیر در زمان و مکان، بررسی شده است. سیال در ناحیه دوردست ساکن می‌باشد و حرکت صفحه باعث حرکت سیال می‌شود. برای حل ابتدا متغیر تشابهی نوینی برای تبدیل معادلات پاره‌ای حاکم بر جریان به معادله دیفرانسیلی معمولی غیر خطی ارائه می‌شود. سپس برای حل این معادله دیفرانسیلی معمولی غیر خطی از مرتبه سه و درجه دو، الگوریتمی بر مبنای روش تفاضل محدود ارائه می‌گردد. صحت معادلات و روش عددی ارائه شده با نتایج موجود بررسی و سرانجام روی پارامترهای موثر بر سرعت سیال در لایه مرزی بحث می‌شود.

۲- مدل مفهومی و معادلات حاکم بر جریان

هندسه مساله در شکل ۱ نمایش داده شده است. سیال غیرقابل تراکم و همگن از یک طرف به صفحه محدود شده و از سه جهت دیگر نامحدود است. سیال در دوردست ساکن می‌باشد اما حرکت صفحه باعث حرکت سیال می‌شود. برای صفحه سرعت متغیر در زمان و مکان فرض شده است. سرعت صفحه تابعی هیپربولیک از زمان و تابعی خطی از مکان می‌باشد. به عبارت دیگر با گذشت زمان و پیشروی در مکان، سرعت صفحه افزایش می‌یابد.



شکل ۱- طرحواره هندسه مساله

معادلات بقای سیال غیر نیوتنی در لایه مرزی بر مبنای مدل توانی برای جریان لایه‌ای به صورت زیر می‌باشند [۱۴ و ۱۵]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\nu \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n$$

روش تفاضل محدود^۱ [۱۶-۱۸] به دستگاه معادلات جبری (۱۰-۱۲) تبدیل و سپس با استفاده از تکنیک شوتینگ^۲ حل می‌شوند.

$$\begin{aligned} y_1 &= f \\ y_2 &= f' \\ y_3 &= f'' \end{aligned} \quad (۸)$$

معادلات (۶ و ۸) به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1' \\ y_3 &= y_2' \\ n(-y_3)^{n-1} y_3' - y_2^2 + \left(\frac{2n}{n+1}\right) y_1 y_3 + \\ &+ r\eta \left(\frac{n-2}{n+1}\right) y_3 - r y_2 = 0 \end{aligned} \quad (۹)$$

با استفاده از تفاضل مرکزی با دقت گسسته سازی از مرتبه دو [۱۹-۲۱]، معادلات به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\frac{y_2^{i+1} - y_2^i}{h} = 0.5(y_3^i + y_3^{i+1}) \quad (۱۰)$$

$$\frac{y_1^{i+1} - y_1^i}{h} = 0.5(y_2^i + y_2^{i+1}) \quad (۱۱)$$

$$\begin{aligned} n(-y_3^i)^{n-1} \frac{y_3^{i+1} - y_3^i}{2h} - (y_2^i)^2 + \left(\frac{2n}{n+1}\right) y_1^i y_3^i + \\ + r\eta \left(\frac{n-2}{n+1}\right) y_3^i - r y_2^i = 0 \end{aligned} \quad (۱۲)$$

که i مشخصه محل گره و h فاصله گام شبکه می‌باشند. برای حل معادله (۱۲) به دو مقدار y_3^0, y_3^1 نیاز است. y_3^0 شرط مرزی است که حدس زده می‌شود. همچنین y_3^1 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y_3^1 = y_3^0 + hf''(0) \quad (۱۳)$$

پس از آن معادلات (۱۰-۱۲) به ترتیب حل می‌شوند و در نهایت شرط مرزی $y_2^\infty = 0$ چک شده و حدس اولیه تصحیح می‌شود (با برونیایی خطی) و دوباره همین روند تکرار می‌شود تا شرط مرزی $y_2^\infty = 0$ ارضا شود.

که $U(x)$ در رابطه (۴) سرعت صفحه می‌باشد. برای تعیین مولفه‌های سرعت از تعریف تابع جریان استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow \psi(x, y) = Ux(Re_x)^{\frac{1}{n+1}} f(\eta) \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (۵)$$

پس از انجام اعمال ریاضی، دسته معادلات (۱) که بر مبنای سه متغیر مستقل (t, x, y) بوده‌اند، به معادله (۶) بر مبنای یک متغیر مستقل تشابهی (η) تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned} n|f|^{n-1} f''' - f'^2 + \left(\frac{2n}{n+1}\right) ff'' + r\eta \left(\frac{n-2}{n+1}\right) f'' - ff' = 0 \\ r = \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (۶)$$

r پارامتری بعد ناپایایی و a و b هم ضرایب تابع سرعت صفحه می‌باشند. شرایط مرزی (۲) برای رابطه (۶) نیز به این صورت تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned} f(\eta) &= 0 \quad \text{at} \quad \eta = 0, \\ f'(\eta) &= 1 \quad \text{at} \quad \eta = 0, \\ f'(\eta) &\rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (۷)$$

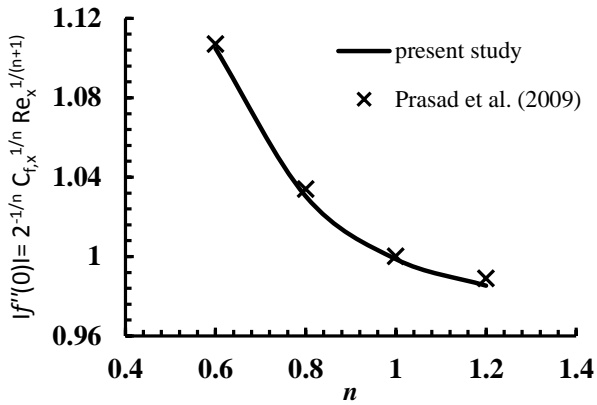
بنابراین توسط متغیر تشابهی تعریف شده در رابطه (۳)، هم معادلات حاکم بر جریان (روابط ۱) و هم شرایط مرزی (روابط ۲) که بر مبنای سه متغیر مستقل (t, x, y) بوده‌اند بر مبنای تنها یک متغیر (η) مستقل بیان شده‌اند. یعنی دسته معادلات حاکم بر حرکت سیال در لایه مرزی که معادلاتی پاره‌ای هستند توسط تبدیلات تشابهی به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شده‌اند. حال معادله دیفرانسیل غیر خطی حاصله که از مرتبه سه و از درجه دو می‌باشد (رابطه ۶) با توجه به شرایط مرزی بدست آمده (روابط ۷) باید حل شود. در ادامه الگوریتم حلی عددی بر مبنای روش تفاضل محدود ارائه می‌گردد.

۳-۲- الگوریتم حل عددی

برای حل عددی ابتدا معادله (۶) توسط تعاریف (۸) به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی (۹) تبدیل می‌شود. دسته معادلات (۹) به کمک گسسته سازی بر مبنای

¹ Finite Difference

² Shooting Method



شکل ۲- اعتبار سنجی نتایج با نتایج پراساد و همکاران [۱۵] در حالت پایا ($r=0$)

در نمودار شکل‌های ۳ و ۴ اثر توان غیر نیوتنی (n) در مدل توانی (میزان غیر نیوتنی بودن) و پارامتر ناپایایی (r) بر پروفیل سرعت در لایه مرزی نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود در سیالات شبه-پلاستیک ($0 < n < 1$) ضخامت لایه مرزی بیشتر از سیالات نیوتنی ($n=1$) است و در سیالات نیوتنی این ضخامت بیشتر از سیالات دیلاتانت^۱ ($1 < n < 2$) است. به عبارت دیگر افزایش توان غیر نیوتنی (n) باعث کاهش ضخامت لایه مرزی می‌شود. نکته مهم در این نمودار در این است که هرچه سیال توان غیر نیوتنی (n) کمتری داشته باشد، یعنی تحت تاثیر نرخ کرنش مقاومت کمتری نشان دهد، توان کمتری برای انتقال تنش دارد. به عبارت دیگر تغییر شکل بیشتری داشته و به همین دلیل ضخامت لایه مرزی نیز بیشتر خواهد بود. نکته دیگری که از مشاهده در شکل ۳ دریافت می‌شود این است که تاثیر توان غیر نیوتنی (n) در نزدیکی دیواره کم است و تفاوتی بین نمودارها دیده نمی‌شود. اما با فاصله گرفتن از صفحه کشسان، تاثیر مدلسازی غیر نیوتنی بهتر دیده می‌شود. از طرف دیگر نمودار شکل ۴ نشان می‌دهد که پارامتر ناپایایی (r) اثر قابل ملاحظه‌ای در پروفیل سرعت ندارد. این امر دلیلی ضمنی دارد، اینکه در متغیر تشابهی تعریف شده در کار حاضر (η) از سرعت صفحه (U) نیز استفاده شده است که

الگوریتم بیان شده روشی ابتکاری از مرتبه دقت دو برای حل معادله غیر خطی مساله حاضر است که توسط نویسندگان کار حاضر ارائه و تعدیل شده است. تمامی تعاریفات و جابجایی طرفین معادلات روی شبکه محاسباتی به منظور رسیدن به یک راه صریح‌تر و آسان‌تر برای مواجهه با ترم غیر خطی $f'''' - f''|f''|^{n-1} f''''$ انجام شده است. برای پیاده سازی روش ارائه شده از زبان برنامه نویسی ++C استفاده شده است. شبکه محاسباتی یک-بعدی و گام انتخاب شده برای ارائه نتایج حاضر، 10^{-5} می‌باشد. با نصف کردن گام شبکه نتایج حاصله کمتر از ۰.۲٪ تغییر داشته‌اند. همچنین از آنجا که دقت گسسته سازی ارائه و استفاده شده از مرتبه دو و معادلات نیز در حالت بی‌بعد می‌باشند، لذا اعداد حاصله برای میدان سرعت تا ۱۰ رقم اعشار بامعنی هستند. برای تعیین معیار همگرایی از شرط فیزیکی مرزی مساله استفاده شده است. به عبارت دیگر هرگاه شرط مرزی $y_2^\infty = f'(\eta \rightarrow \infty) = 0$ ارضاء شود، پاسخ مساله بدست آمده است.

۴- نتایج

برای معتبرسازی نتایج حاصله از شبیه سازی عددی، از نتایج چند حالت خاص که در مرجع [۱۵] موجود می‌باشد استفاده شده است. شکل ۲ مشتق مرتبه دوم تابع تشابهی سرعت بر روی صفحه ($f''(0)$) که طبق رابطه (۱۴) با ضریب اصطکاک مرتبط است را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود تطابق مناسبی بین نتایج کار حاضر و مطالعه پراساد و همکاران [۱۵] وجود دارد.

$$C_f = -\left(\frac{2\tau_{xy}}{\rho U^2}\right)_{y=0} = 2|f''(0)|^n (Re_x)^{-\frac{1}{n+1}} \quad (14)$$

¹ Dilatant

۵- نتیجه گیری

در این مطالعه سعی شده است که برای بررسی جریان ناپایای سیال غیر نیوتنی تراکم‌ناپذیر روی یک صفحه کشسان با سرعت متغیر در زمان و مکان، روشی بر مبنای تبدیلات تشابهی ارائه شود. مدلسازی حرکت سیال غیر نیوتنی بر مبنای قانون توانی انجام گرفته است. متغیر تشابهی جدیدی برای تبدیل دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر جریان سیال غیر نیوتنی و شرط مرزی متغیر و ناپایای صفحه کشسان معرفی شده و از آن برای رسیدن به معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی استفاده شده است. برای حل معادله حاکم بدست آمده نیز الگوریتمی بر مبنای روش تفاضل محدود ارائه شده است. از نتایج مهم کار حاضر می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- مدلسازی انجام شده در مطالعه حاضر بر مبنای متغیر تشابهی نوین و روش عددی ارائه شده برای حل معادله حاکم بدست آمده در پیش‌بینی رفتار سیال دقت مناسبی داشته و توانایی پیش‌بینی نتایج شبیه سازی‌های مشابه انجام شده را به خوبی دارا می‌باشد.
- افزایش توان غیر نیوتنی در قانون توانی (n) ، ضخامت لایه مرزی را کاهش می‌دهد. همچنین این افزایش باعث کاهش ضریب اصطکاک روی صفحه می‌شود.
- تاثیر توان غیر نیوتنی (n) در نزدیکی دیواره کم است و تفاوتی بین نمودارها دیده نمی‌شود. اما با فاصله گرفتن از صفحه کشسان، تاثیر مدلسازی غیر نیوتنی مشهود می‌شود.
- در نظر گرفتن مدل نیوتنی برای سیال غیر نیوتنی باعث خطای زیادی (تا ۲۰٪) در پیش‌بینی ضریب اصطکاک روی صفحه می‌شود که اهمیت مدلسازی را نشان می‌دهد.

پارامتر ناپایایی را به صورت ضمنی در متغیر مستقل دستگاه تشابهی (η) دخالت می‌دهد.

نمودار شکل ۵ تاثیر پارامتر ناپایایی (r) و توان غیر نیوتنی (n) را بر مشتق مرتبه دوم تابع تشابهی سرعت بر روی صفحه $(f''(0))$ که طبق رابطه (۱۴) با ضریب اصطکاک مرتبط است، نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که ضریب اصطکاک صفحه با افزایش توان غیر نیوتنی (n) کاهش می‌یابد. همچنین دیده می‌شود که تغییرات ضریب اصطکاک برای سیال تحلیل رونده $(n < 1)$ نسبت به تغییر توان غیر نیوتنی (n) بیشتر از سیال تقویت شونده $(n > 1)$ است. به عبارت دیگر مشاهده می‌شود که اگر مدل نیوتنی فرض شود، تا ۲۰٪ خطا برای سیال تحلیل رونده $(n < 1)$ خواهیم داشت. این مساله اهمیت حیاتی در نظر گرفتن مدل غیر نیوتنی را برای سیالات شبه‌پلاستیک یا تحلیل رونده $(n < 1)$ را نشان می‌دهد.

همچنین با مشاهده در نمودار شکل ۵ می‌توان دریافت که افزایش پارامتر ناپایایی (r) موجب افزایش ضریب اصطکاک روی صفحه می‌شود. همانطور که بیان شده است، پارامتر ناپایایی (r) عبارتست از نسبت $r = \frac{b}{a}$ که

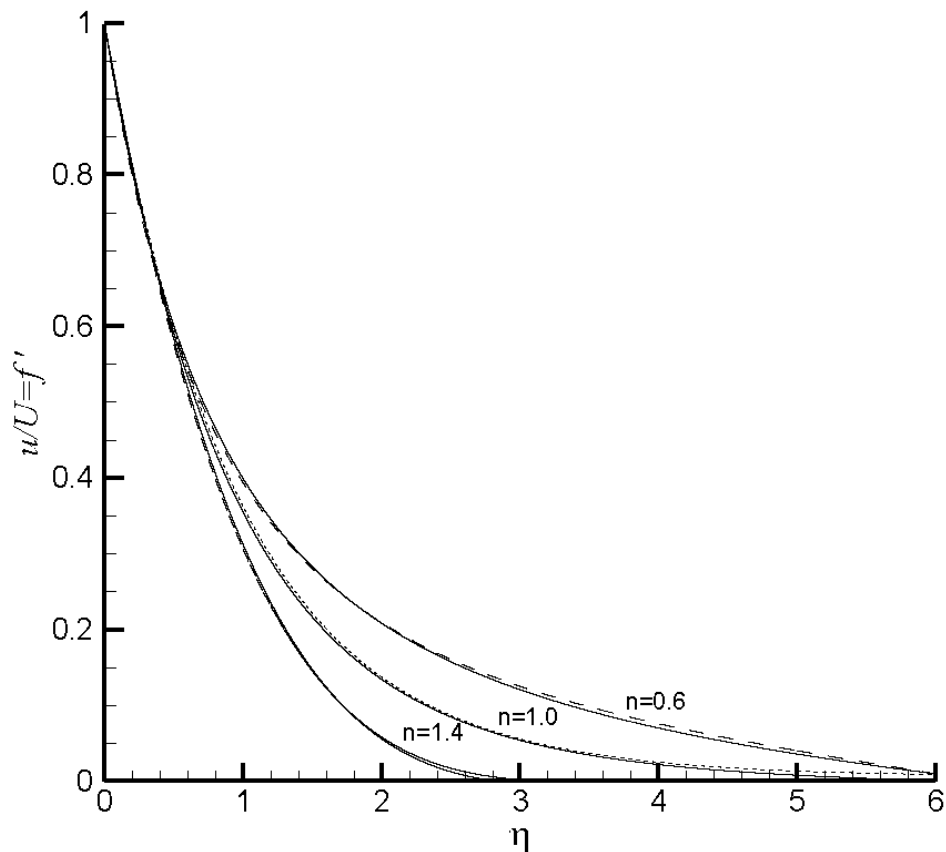
$$U(t, x) = \frac{ax}{1-bt}$$

و a پارامترهای سرعت صفحه کشسان می‌باشند. پارامتر ناپایایی بیشتر، به معنای کوچکتر شدن مخرج کسر (به ازای a ثابت که از خواص ساختاری صفحه است) می‌باشد. بنابراین با افزایش پارامتر ناپایایی، سرعت نیز افزایش می‌یابد و سرعت بیشتر باعث ضریب اصطکاک بیشتر می‌شود. تاثیر پارامتر ناپایایی (r) و توان غیر نیوتنی (n) بر $f''(0)$ در جدول ۱ نیز ارائه شده است.

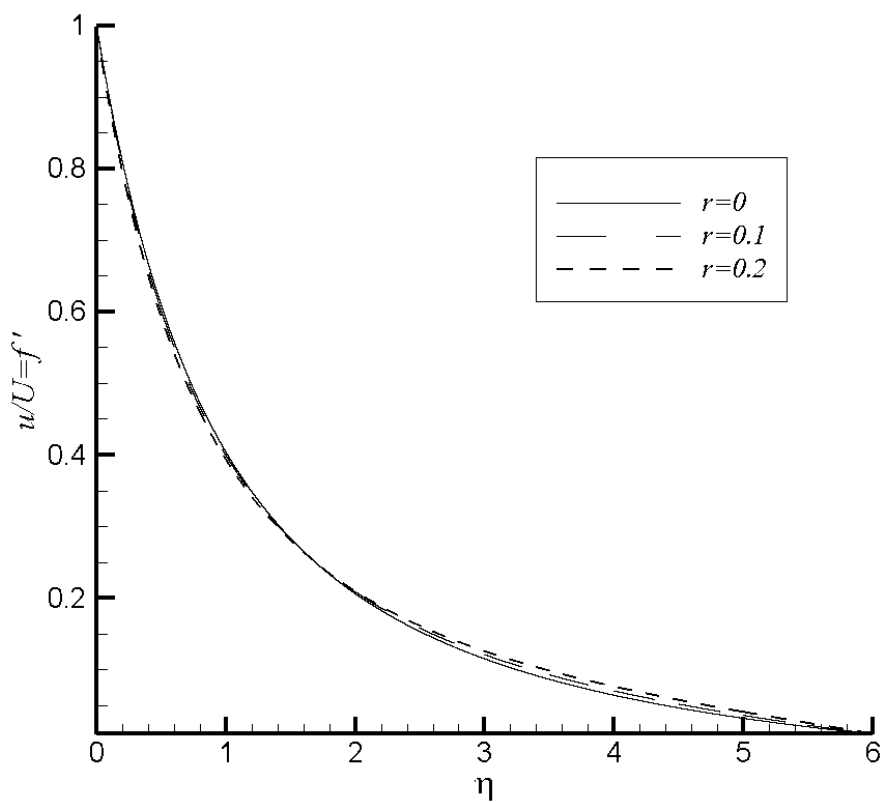
جدول ۱- تاثیر پارامتر ناپایایی (r) و توان غیر نیوتنی (n) بر

مشتق دوم تابع تشابهی سرعت روی صفحه $(f''(0))$

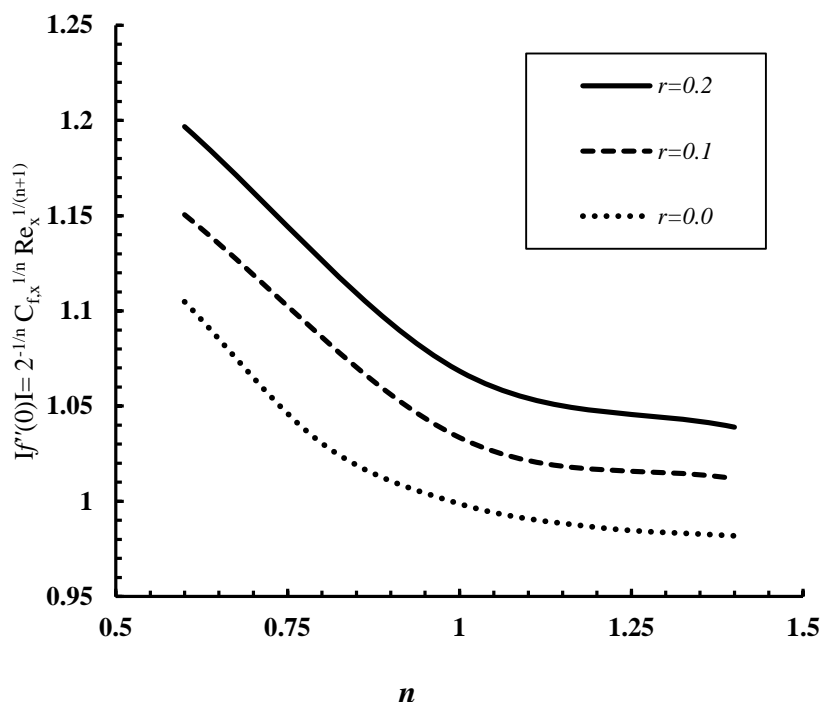
n	$r=0$	$r=0.1$	$r=0.2$
0.6	1.1048	1.15049	1.19674
1	0.9987	1.0335	1.06839
1.4	0.9783	1.0119	1.03894



شکل ۳- تاثیر توان غیر نیوتنی (n) بر پروفیل سرعت در لایه مرزی (خط چین برای $r=0.2$ و خط پر برای $r=0.1$)



شکل ۴- تاثیر پارامتر ناپایایی (r) بر پروفیل سرعت در لایه مرزی ($n=0.6$)



شکل ۵- تاثیر توان غیر نیوتنی (n) و پارامتر ناپایایی (r) بر ضریب اصطکاک روی صفحه

فهرست علائم

پارامتر ثابت در سرعت صفحه	a
پارامتر ثابت در سرعت صفحه	b
تابع تشابهی هیدرودینامیکی	f
گام شبکه محاسباتی	h
توان غیر نیوتنی	n
عدد رینولدز تصحیح شده (تعمیم یافته)	Re
سرعت صفحه	U
مولفه‌های سرعت	u, v
دستگاه مختصات	x, y
توابعی از تابع تشابهی هیدرودینامیکی (f)	y_1, y_2, y_3
حروف یونانی	
متغیر تشابهی	η
وسکوزیته سینماتیک	ν
چگالی	ρ
تابع جریان	ψ
بالانویس	
فاصله دور از صفحه (مکان بی‌نهایت دور)	∞
پانویس	
مشتق	'
نشانهگر مکان گره در شبکه محاسباتی	$i=0, 1, \dots$

مراجع

- [1] Crane, L.J. (1970). "Flow past a stretching plate". *Z Angew Math Phys*, Vol. 21, pp. 645–647.
- [2] McLeod, B., Rajagopal, K.R. (1987). "On the non-uniqueness of the flow of a Navier-Stokes fluid due to stretching boundary". *Arch Ration Mech Anal*, Vol. 98, pp. 385–493.
- [3] Dandapat, B.S., Gupta, A.S. (1989). "Flow and heat transfer in a visco-elastic fluid over a stretching sheet". *Int. J. Non-Linear Mech.*, Vol. 24, pp. 215–219.
- [4] Chiam, T.C. (1997). "Magnetohydrodynamic heat transfer over a non-isothermal stretching sheet". *Acta Mech.*, Vol. 122, pp. 169–179.
- [5] Ali, M.E. (1995). "On the thermal boundary on a power-law stretched surface with suction or injection". *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 16, pp. 280–290.
- [6] Yurusoy, M. (2006). "Unsteady boundary layer flow of power-law fluid on stretching sheet surface". *International Journal of Engineering Science*, Vol. 44, pp. 325–332.
- [7] Acrivos, A., Shah, M., Petersen, E.E. (1960). "Momentum and heat transfer in laminar boundary layer flows of non-Newtonian fluids past external surfaces". *AIChE J.*, Vol. 6, pp. 312–317.
- [8] Schowalter, W.R. (1960). "The application of boundary-layer theory to power-law pseudoplastic fluids: similarity solutions". *AIChE J.*, Vol. 6, pp. 25–28.
- [9] SubhasAbel, M., Siddheshwar, P.G., Mahesha, N. (2009). "Effects of thermal buoyancy and variable thermal conductivity on the MHD flow and heat transfer in a power-law fluid past a vertical stretching sheet in the presence of a non-uniform heat source". *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 44, pp. 1–12.
- [10] Acharya, A., Singh, L.L., Dash, G.C. (1999). "Heat and mass transfer over an accelerating surface with heat source in presence of suction and blowing". *International Journal of Engineering Science*, Vol. 37, pp. 189–211.
- [11] Cheng, W.T., Huang, C.N. (2004). "Unsteady flow and heat transfer on an accelerating surface with blowing or suction in the absence and presence of a heat source or sink". *Chemical Engineering Science*, Vol. 59, pp. 771–780.
- [12] Dandapat, B.S., Santra, B., Andersson, H.I. (2003). "Thermocapillarity in a liquid film on an unsteady stretching surface". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, pp. 3009–3015.
- [13] Bachok, N., Ishak, A., Pop, I. (2012). "Unsteady boundary-layer flow and heat transfer of a nanofluid over a permeable stretching/shrinking sheet". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 55, pp. 2102–2109.
- [14] Ibrahim, W., Shanker, B. (2012). "Unsteady MHD boundary-layer flow and heat transfer due to stretching sheet in the presence of heat source or sink". *Computers & Fluids*, Vol. 70, pp. 21–28.
- [15] Prasad, K.V., Pal, D., Datti, P.S. (2009). "MHD power-law fluid flow and heat transfer over a non-isothermal stretching sheet". *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, Vol. 14, pp. 2178–2189.
- [16] Dehghan, M., Basirat Tabrizi, H. (2012). "On near-wall behavior of particles in a dilute turbulent gas–solid flow using kinetic theory of granular flows". *Powder Technology*, Vol. 224, pp. 273–280.
- [17] Dehghan, M., Basirat Tabrizi, H. (2014). "Turbulence effects on the granular model of particle motion in a boundary layer flow". *Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 92, pp. 189–195.
- [18] Dehghan, M., Jamal-Abad, M.T., Rashidi, S. (2014). "Analytical interpretation of the local thermal non-equilibrium condition of porous media imbedded in tube heat exchangers". *Energy Conversion Management*, Vol. 85, pp. 264–271.

- [19] Dehghan, M., Rahmani, Y., Ganji, D.D., Saedodin, S., Valipour, M.S., Rashidi, S. (2015). "Convection–radiation heat transfer in solar heat exchangers filled with a porous medium: Homotopy perturbation method versus numerical analysis". *Renewable Energy*, Vol. 74, pp. 448-455.
- [20] Dehghan, M., Daneshpour, M., Valipour, M.S., Rafee, R., Saedodin, S. (2015). "Enhancing heat transfer in microchannel heat sinks using converging flow passages". *Energy Conversion and Management*, Vol. 92, pp. 244-250.
- [21] Dehghan, M., Mahmoudi, Y., Valipour, M.S., Saedodin, S. (2015). "Combined Conduction-Convection-Radiation Heat Transfer of Slip Flow inside a Micro-channel Filled with a Porous Material". *Transport in Porous Media*, DOI: 10.1007/s11242-015-0483-z.