

پیشنهاد یک جزء تیری جدید بر مبنای انرژی کرنشی برای تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد تیرهای با اثر برش

عباس معلمی اوره^{۱*} و محمد کارکن^۲

اطلاعات مقاله	چکیده
<p>واژگان کلیدی: اجزای محدود، اثر برش، تیر تیموشنکو، پایداری، بار بحرانی، ارتعاش آزاد.</p>	<p>در این مقاله یک جزء دو گرهی برای تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو پیشنهاد شده است. میدان جابجایی این جزء از درجه سوم و میدان دوران آن از درجه دوم انتخاب شده و همچنین کرنش برشی جزء نیز مقداری ثابت فرض شده است. با نوشتن انرژی کل تیر و ایستا کردن آن نسبت به کرنش برشی، تابع‌های درون‌یاب برای میدان جابه‌جایی و دوران تیر به صورت دقیق محاسبه گردید. با بهره جویی از این تابع‌های درون‌یاب، ماتریس سختی تیر محاسبه و در ادامه با نوشتن معادلات حاکم بر پایداری و ارتعاش آزاد تیر، به ترتیب ماتریس سختی هندسی و ماتریس جرم جزء پیشنهادی نیز محاسبه گردید. در پایان با آزمون‌های عددی دقت و کارایی جزء پیشنهادی مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج آزمون‌ها، دقت بالای جزء در تحلیل پایداری تیر و یافتن بار بحرانی آن و همچنین تحلیل ارتعاش آزاد تیر را نشان داد.</p>

۱- مقدمه

اثر اینرسی دورانی تیرهای ضخیم اولین بار توسط رابلی بررسی شد، اما تیموشنکو این شیوه را گسترش داد و اثر برش نیز وارد رابطه‌سازی نمود. به دلیل پیچیده بودن معادله‌های حاکم بر ارتعاش آزاد تیرها در حالت کلی، روش‌های عددی نظیر اجزای محدود گسترش چشم‌گیر پیدا کرده‌اند. تا کنون جزء‌های گوناگونی بر مبنای تئوری تیموشنکو ارائه شده است. این جزء‌ها در دو دسته ساده و پیچیده طبقه‌بندی می‌شوند. بعضی از پژوهشگران، از جزء‌های ساده‌ی دو گرهی با چهار درجه‌ی آزادی استفاده کرده‌اند [۲-۴]. همچنین توماس و همکاران به بررسی جزء‌های پیشنهاد شده توسط سایر پژوهشگران پرداخته‌اند [۳]. اولین جزء مرتبه‌ی بالا با هشت درجه آزادی، توسط کاپور پیشنهاد شد [۵]. لیس و توماس یک جزء پیچیده را با به کار بردن سری‌های چند جمله‌ای مستقل

در تحلیل ارتعاش آزاد تیرها، دو گونه تئوری گسترش یافته‌اند. در تئوری اولر-برنولی، ارتعاش تیر بدون اثر برش بررسی می‌شود. این شیوه، در تیرهای با ضخامت کم که اثر برش ناچیز می‌باشد، پاسخ مناسب و قابل قبول را به دست می‌دهد. اما با افزایش ضخامت تیر و در نتیجه افزایش اثر تغییر شکل برشی، میزان خطای پاسخ نیز افزایش می‌یابد [۱]. در مقابل، در رابطه‌سازی تیموشنکو اثر تغییر شکل‌های برشی وارد رابطه‌سازی می‌گردد. بنابراین این شیوه به خصوص در تیرهای ضخیم که اثر برش تأثیرگذار است، پاسخ بهتری را به دست می‌دهد. اگرچه

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: moallem@iaush.ac.ir

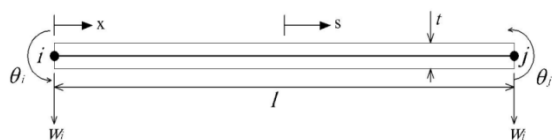
۱. استادیار، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهرضا

۲. دانشجوی دکتری مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

در ادامه، با بهره‌جویی از تابع انرژی خمشی و برشی تیر، تابع‌های درونیاب این جزء به صورت دقیق محاسبه شده و در پایان، با به کار بردن این تابع‌های درونیاب، ماتریس سختی، ماتریس سختی هندسی و ماتریس جرم جزء، به صورت صریح حساب گردیده است. برای به دست آوردن شکل صریح تابع‌های درونیاب از نرم افزار Mathematica 5.1 استفاده شد. این نرم افزار، برنامه‌ای بسیار قدرتمند در محاسبات پارامتری می‌باشد. با به دست آوردن تابع‌های درونیاب روابط اجزای محدود جزء استخراج گردید. با بهره‌جویی از این ماتریس‌ها ارتعاش آزاد تیر و کمانش ستون با شرایط تکیه‌گاهی ساده و گیردار مورد ارزیابی قرار گرفت. برای پیاده سازی روش پیشنهاد شده و ارزیابی جزء از نرم افزار MATLAB (R2010a) استفاده شد. پس از نوشتن برنامه و به منظور ارزیابی این روش جدید، چندین مسأله سنگ نشانه (Benchmark problem) تحلیل شد و نتایج جزء پیشنهادی با نتایج سایر پژوهشگران مقایسه گردید.

۳- رابطه‌سازی اجزای محدود

در روش اجزای محدود، میدان‌های جابه‌جایی و دوران جزء، با تابع‌های درونیاب به تغییر مکان‌های گرهی وابسته می‌گردند. شکل ۱، جزء دو گرهی پیشنهادی را نشان می‌دهد. برای محاسبه تابع درونیاب جزء، میدان جابه‌جایی از درجه سوم و میدان دوران از درجه دوم انتخاب شده است. همچنین، کرنش برشی در تیر، مقدار ثابت γ_0 فرض شده است. بنابراین می‌توان مطابق روابط (۱) نوشت.



شکل ۱- جزء تیر تیموشنکو

برای میدان‌های جابه‌جایی و دوران بدست آوردند [۶، ۷]. همچنین این شیوه رابطه سازی توسط وبستر [۸] نیز مورد استفاده قرار گرفته است. راتو و گوپتارتعاش آزاد تیرهای در حال دوران را مورد بررسی قرار داده‌اند [۹]. در برخی از راهکارها، نظیر رابطه‌سازی هم‌عامل، میدان جابه‌جایی و دوران، هم مرتبه و مستقل از هم فرض می‌گردند [۱۰]. گونکالو و همکاران، معادله‌ی فرکانس و مودهای ارتعاشی برای شرایط مختلف تکیه‌گاهی تیرهایی با نگره‌ی اولر-برنولی را ارائه کرده است [۱۱]. لی و اسکولتز با روش شبه طیفی، ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو را مورد بررسی قرار داده‌اند [۱۲].

تا کنون پژوهش‌های کمتری بر روی کمانش تیر نسبت به ارتعاش آزاد آن صورت پذیرفته است. ویکوفسکی و همکارش با بهره جویی از یک روش تقریبی بر پایه‌ی اجزای محدود، پایداری تیرهای اولر-برنولی و تیموشنکو را مورد بررسی قرار دادند [۱۳]. همچنین فریدمن و کوسماتکا با در نظر گرفتن اثر برش، بار بحرانی تیر تیموشنکو را حساب کردند [۱۴].

هدف از این مقاله تعیینیک روش جدید اجزای محدود بر پایه‌ی نگره‌ی تیموشنکو برای یافتن مودهای ارتعاشی و بار بحرانی تیرهای نازک و ضخیم (که اثر تغییر شکلهای برشی زیاد است) می‌باشد.

۲- مواد و روش‌ها

در این مقاله برای یافتن مودهای ارتعاشی و بار بحرانی تیرهای نازک و ضخیم (که اثر تغییر شکلهای برشی زیاد است)، یک روش جدید اجزای محدود بر پایه‌ی نگره‌ی تیموشنکو پیشنهاد شده است. در این تئوری اثر تغییر شکلهای برشی نیز وارد تحلیل می‌گردد. در روش پیشنهادی، میدان جابه‌جایی جزء از درجه سوم و میدان دوران آن از درجه دوم انتخاب شده است. همچنین کرنش برشی جزء نیز ثابت، فرض شده است.

$$U_b = \frac{EI}{2} \int_0^l \kappa^2 dx = \frac{EI}{4} \int_{-1}^1 \kappa^2 ds \quad (۴)$$

در رابطه (۴)، κ ، انحنای می باشد که به صورت رابطه (۵) حساب می گردد.

$$\kappa = -\frac{2}{l} \cdot \frac{d\theta}{ds} = \kappa_0 - 6 \frac{s\gamma_0}{l} \quad (۵)$$

$$\kappa_0 = \frac{1}{l} (\theta_i - \theta_j + 3s\Gamma)$$

با جای گذاری رابطه های (۵) در معادله (۴)، کارمایه حاصل از خمش به صورت رابطه (۶) پیدا می گردد.

$$U_b = U_0 + 6EI \left(-\frac{\Gamma\gamma_0}{l} + \frac{\gamma_0^2}{l} \right) \quad (۶)$$

$$U_0 = \frac{EI}{4} \int_{-1}^1 \kappa_0^2 ds$$

کارمایه کرنش برشی را نیز می توان به صورت رابطه (۷) نوشت.

$$U_s = \frac{GA}{2f_s} \int_0^l \gamma^2 dx = \frac{GA}{4f_s} \int_{-1}^1 \gamma_0^2 ds = \frac{GA}{2f_s} \gamma_0^2 \quad (۷)$$

بنابراین کارمایه کرنشی کل، با جمع کارمایه خمشی و کارمایه برشی به صورت رابطه (۸) حاصل می گردد.

$$U = U_b + U_s = U_0 - \frac{6EI\Gamma}{l} \gamma_0 + \frac{6EI}{l} \gamma_0^2 + \frac{GA}{2f_s} \gamma_0^2 \quad (۸)$$

چنانچه مشتق کارمایه کل نسبت به γ_0 صفر گردد (

$\partial U / \partial \gamma_0 = 0$)، عامل مجهول γ_0 به صورت رابطه (۹)، پیدا می شود.

$$\gamma_0 = \frac{6EI\Gamma}{\frac{GA}{f_s} + 12EI} = \delta \Gamma \quad (۹)$$

$$\delta = \frac{6\lambda}{l^2 + 12\lambda}, \lambda = \frac{f_s EI}{GA}$$

$$w = \frac{w_i}{2}(1-s) + \frac{w_j}{2}(1+s) + \beta_0 l (1-s^2) + \beta_1 l s (1-s^2)$$

$$\theta = \frac{\theta_i}{2}(1-s) + \frac{\theta_j}{2}(1+s) + \alpha_0 (1-s^2) \quad (۱)$$

$$\gamma = \gamma_0$$

$$s = \frac{2x}{l} - 1$$

در رابطه های (۱) عامل های $\alpha_0, \beta_0, \beta_1, \gamma_0$ مجهول می باشند. برای یافتن این عامل ها، نخست معادله کرنش برشی برای جزء تیموشنکو برپا می گردد و مقدار آن برابر γ_0 قرار داده می شود (رابطه ۲).

$$\gamma = \frac{dw}{dx} - \theta = \frac{2}{l} \cdot \frac{dw}{ds} - \theta$$

$$\gamma_0 = \frac{2}{l} \left(-\frac{w_i}{2} + \frac{w_j}{2} - 2\beta_0 l s + \beta_1 l - 3\beta_1 l s^2 \right) - \theta_i \left(\frac{1-s}{2} \right) - \theta_j \left(\frac{1+s}{2} \right) - \alpha_0 (1-s^2) \quad (۲)$$

با توجه به رابطه (۲)، ضریب جمله های s و s^2 مساوی صفر می باشد. بنابراین عامل های α_0, β_1 بر حسب عامل مجهول γ_0 به دست می آید (روابط ۳).

$$\Gamma = \frac{2}{l} (w_j - w_i) - (\theta_i + \theta_j)$$

$$\beta_0 = \frac{1}{8} (\theta_i - \theta_j) \quad (۳)$$

$$\alpha_0 = -\frac{3}{2} \left(\gamma_0 - \frac{1}{2} \Gamma \right)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{6} \alpha_0$$

برای یافتن γ_0 ، مشتق کارمایه کرنشی تیر نسبت به γ_0 صفر می گردد. کارمایه کرنشی از جمع دو بخش کارمایه خمشی و کارمایه برشی حاصل می شود. کارمایه خمشی را می توان به صورت رابطه (۴) به دست آورد.

در روابط (۱۲)، $[N]$ ماتریس تابع درون‌یاب رابطه‌ی (۱۱) می‌باشد، همچنین $\{D\}_E$ تغییر مکان‌های گرهی و $[B]$ ماتریس کرنش می‌باشد. بنابراین ماتریس سختی جزء تیموشنکو را می‌توان از رابطه‌ی (۱۳) به دست آورد.

$$[K_0] = \int [B]^T [D_m] [B] dx \quad (13)$$

در رابطه‌ی کنونی ماتریس $[D_m]$ ، وابسته به خصوصیات مکانیکی جسم می‌باشد. برای جزء تیموشنکو این ماتریس به صورت رابطه (۱۴) به دست می‌آید.

$$[D_m] = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & \frac{GA}{f_s} \end{bmatrix} \quad (14)$$

در اینجا، f_s ضریب شکل برشی مقطع می‌باشد که برای مقاطع مستطیلی $1/2$ اختیار می‌گردد. با محاسبه رابطه‌ی (۱۳)، ماتریس سختی جزء به صورت رابطه (۱۵) به دست می‌آید.

$$[K_0] = \frac{EI}{l^3 + 12l\lambda} \times \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 + 12\lambda & -6l & 2l^2 - 12\lambda \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 - 12\lambda & -6l & 4l^2 + 12\lambda \end{bmatrix} \quad (15)$$

۴- ماتریس جرم

انرژی جنبشی تیر با اثر برش را می‌توان به صورت جمع دو بخش انرژی جنبشی انتقالی و دورانی نوشت (رابطه (۱۶)).

$$T = \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \rho A \dot{y}^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \rho I \dot{\theta}^2 dx \quad (16)$$

بنابراین ماتریس جرم جزء را می‌توان به صورت رابطه (۱۷) نوشت.

با جای‌گذاری عامل‌های $\alpha_0, \beta_0, \beta_1, \gamma_0$ ، در رابطه‌ی (۱) تابع درون‌یاب دقیق برای جزء تیموشنکو شکل (۱) به صورت روابط (۱۰ و ۱۱) به دست می‌آید.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ N_5 & N_6 & N_7 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{ni} \\ w_j \\ \theta_{nj} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$N_1 = \frac{1}{4} [2 + s^3(1 - 2\delta) + s(-3 + 2\delta)]$$

$$N_2 = \frac{l}{4} [0.5(1 - s^2) + (s^3 - s)(0.5 - \delta)]$$

$$N_3 = \frac{1}{4} [2 - s^3(1 - 2\delta) - s(-3 + 2\delta)]$$

$$N_4 = \frac{l}{4} [-0.5(1 - s^2) + (s^3 - s)(0.5 - \delta)] \quad (11)$$

$$N_5 = \frac{1}{4l} [6(1 - s^2)(-1 + 2\delta)]$$

$$N_6 = \frac{1}{4} [-1 + s(-2 + 3s) + 6(1 - s^2)\delta]$$

$$N_7 = \frac{1}{4l} [-6(1 - s^2)(-1 + 2\delta)]$$

$$N_8 = \frac{1}{4} [-1 + s(2 + 3s) + 6(1 - s^2)\delta]$$

در روش اجزای محدود، تغییر مکان‌های درون جزء با تابع‌های درون‌یاب به درجه آزادی‌های گرهی جزء وابسته می‌گردند. همچنین می‌توان کرنش نیز به درجه آزادی‌های گرهی وابسته نمود. بنابراین روابط کلی اجزای محدود را می‌توان به صورت رابطه (۱۲) نوشت [۱].

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = [N] \{D\}_E$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{dy}{dx} \\ -\frac{dy}{dx} + \theta \end{Bmatrix} = [B] \{D\}_E \quad (12)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx} & -1 \end{bmatrix} [N]$$

$$\begin{aligned}
 m_{21} &= 36l \\
 m_{22} &= -3(60\lambda - l^2) \\
 m_{23} &= \frac{4}{l}(360\lambda^2 + 15l^2\lambda + 3l^4) \\
 m_{24} &= \frac{1}{l}(720\lambda^2 - 60l^2\lambda - l^4)
 \end{aligned} \quad (21)$$

۵- ماتریس سختی هندسی

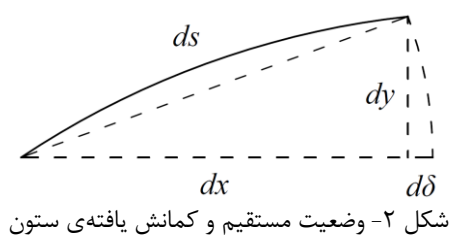
برای تحلیل کمانش از مفهوم تعادل خنثی استفاده شده است. تیر در وضعیت تعادل خنثی می‌تواند هر دو شکل مستقیم و یا خم شده را داشته باشد. شکل (۲) وضعیت مستقیم و کمانش یافته ستون را نشان می‌دهد. با فرض کوچک بودن تغییر مکان‌ها، میزان تغییر شکل محوری ناشی از خمش ستون و همچنین کار بار محوری را می‌توان به صورت رابطه (۲۲) نوشت.

$$\begin{aligned}
 ds &= \sqrt{(dx^2 + dy^2)} \approx dx + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \\
 \Rightarrow d\delta &= \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx
 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\Delta W = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

با توجه به رابطه‌ی (۲۲) ماتریس سختی هندسی جزء به صورت رابطه (۲۳) حساب می‌شود.

$$[K_g] = \int_0^l \left[\frac{dN_w}{dx} \right]^T P \left[\frac{dN_w}{dx} \right] dx \quad (23)$$



$$\begin{aligned}
 [M] &= [M_1] + [M_2] = \frac{l}{2} \int_1^l \rho A [N_w]^T [N_w] ds \\
 &\quad + \frac{l}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \rho I [N_\theta]^T [N_\theta] ds
 \end{aligned} \quad (17)$$

ماتریس جرم انتقالی $[M_1]$ برای این جزء به صورت رابطه (۱۸) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 [M_1] &= \frac{\rho A l^5}{210(12\lambda + l^2)^2} \times \\
 &\quad \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & m_{15} & -m_{14} & m_{16} \\ m_{13} & -m_{14} & m_{11} & -m_{12} \\ m_{14} & m_{16} & -m_{12} & m_{15} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (18)$$

عامل‌های ماتریس رابطه (۱۸)، به صورت روابط (۱۹) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= \frac{6}{l^4} (1680\lambda^2 + 294l^2\lambda + 13l^4) \\
 m_{12} &= \frac{1}{l^3} (1260\lambda^2 + 231l^2\lambda + 11l^4) \\
 m_{13} &= \frac{9}{l^4} (560\lambda^2 + 84l^2\lambda + 3l^4) \\
 m_{14} &= -\frac{1}{2l^3} (2520\lambda^2 + 378l^2\lambda + 13l^4) \\
 m_{15} &= \frac{2}{l^2} (126\lambda^2 + 21l^2\lambda + 13l^4) \\
 m_{16} &= -\frac{3}{2l^2} (168\lambda^2 + 28l^2\lambda + 13l^4)
 \end{aligned} \quad (19)$$

همچنین ماتریس جرم دورانی $[M_2]$ را نیز، می‌توان به صورت رابطه (۲۰) به دست آورد.

$$\begin{aligned}
 [M_2] &= \frac{\rho I l^2}{30(12\lambda + l^2)^2} \times \\
 &\quad \begin{bmatrix} m_{21} & m_{22} & -m_{21} & m_{22} \\ m_{22} & m_{23} & -m_{22} & m_{24} \\ -m_{21} & -m_{22} & m_{21} & -m_{12} \\ m_{22} & m_{24} & -m_{12} & m_{23} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (20)$$

عامل‌های بکار رفته در ماتریس رابطه (۲۰) به صورت روابط (۲۱) نوشته می‌شوند.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{eff}^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{\pi^2 f_s EI}{L_{eff}^2 GA}} \right) \quad (27)$$

در رابطه (۲۷)، L_{eff} طول موثر ستون می‌باشد.

۶- آزمون عددی یکم (تحلیل ارتعاش)

در این بخش، کارایی جزء پیشنهادی، با بررسی تحلیل ارتعاش آزاد یک تیر با تکیه‌گاه‌های ساده مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. این تیر دارای طول $l=1$ ، مدول کشسانی $E=10e7$ ، ضخامت $t=0.001$ ، چگالی $\rho=1$ و ضریب پواسون $\nu=0.3$ می‌باشد. به منظور مقایسه با نتایج سایر پژوهشگران، عامل‌های بی‌بعد فرکانس (λ_i)، برای پنج فرکانس اول این تیر با بهره‌جویی از ۴۰ جزء، در جدول‌های ۱ تا ۸ آورده شده است. در جدول‌های ۱ تا ۴ عامل‌های بدون بعد فرکانس طبیعی ارتعاش آزاد تیر با تکیه‌گاه ساده با نسبت‌های مختلف طول به ضخامت، آورده شده است. رابطه عامل λ_i با فرکانس طبیعی تیر به صورت رابطه (۲۸) است.

$$\lambda_i^2 = \omega_i l^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (28)$$

در جدول‌های ۵ تا ۸ نیز، عامل‌های بدون بعد فرکانس برای تیر با تکیه‌گاه گیردار برای نسبت‌های مختلف طول به ضخامت، آورده شده و همچنین با نتایج دیگر پژوهشگران مقایسه شده است. با توجه به ای جدول‌ها، مشاهده می‌گردد که دقت جزء پیشنهادی در تحلیل ارتعاش آزاد تیر بسیار بالا می‌باشد. شکل‌های ۴ و ۵ به ترتیب، شکل‌های ارتعاشی سه مود اول تیر باتکیه‌گاه‌های ساده و گیردار را نشان می‌دهند.

با محاسبه‌ی رابطه‌ی (۲۳)، ماتریس سختی هندسی به صورت رابطه (۲۴) به دست می‌آید.

$$[K_g] = \frac{P}{60l} \begin{bmatrix} k_{g1} & k_{g2} & k_{g3} & k_{g2} \\ k_{g2} & k_{g4} & -k_{g2} & k_{g5} \\ k_{g3} & -k_{g2} & k_{g1} & -k_{g2} \\ k_{g2} & k_{g5} & -k_{g2} & k_{g4} \end{bmatrix} \quad (24)$$

عامل‌های ماتریس سختی هندسی رابطه (۲۴)، به صورت روابط (۲۵) می‌باشند.

$$\begin{aligned} k_{g1} &= 60 + 12\beta \\ k_{g2} &= 6\beta l \\ k_{g3} &= -60 - 12\beta \\ k_{g4} &= 5l^2 + 3\beta l^2 \\ k_{g5} &= 3\beta l^2 - 5l^2 \\ \beta &= \frac{l^4}{(l^2 + 12\lambda)^2} \end{aligned} \quad (25)$$

کمانش زمانی رخ خواهد داد که سختی کل سازه صفر گردد. باید توجه داشت که ماتریس سختی کل سازه از روی هم‌گذاری ماتریس سختی هر جزء سازه به دست می‌آید. بنابراین بار بحرانی را می‌توان با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس سختی کل سازه به دست آورد (رابطه ۲۶).

$$\det([K]) = \det([K_0] - P[K_g]) = 0 \Rightarrow P_{cr} \quad (26)$$

مشاهده می‌شود که پدیده‌ی کمانش منجر به حل یک مسأله مقدار ویژه می‌گردد. کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی رابطه (۲۶)، بار کمانشی تیر خواهد بود. یادآوری می‌گردد که پاسخ تحلیلی کمانش ستون‌های با اثر برش را، بازانت و کدولین به صورت رابطه ۲۷ ارائه کرده اند [۱۵].

جدول ۱- عامل بدون بعد فرکانس h/l برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده

مود	حل اولر	$h/l = 0.002$		
		Ferreira [10]	Lee and Schultz [12]	جزء پیشنهادی
۱	۳/۱۴۱۵۹	۳/۱۴۲۸	۳/۱۴۱۵۸	۳/۱۴۱۵۸
۲	۶/۲۸۳۱۹	۶/۲۹۲۸	۶/۲۸۳۱۰	۶/۲۸۳۱۰
۳	۹/۴۲۴۷۸	۹/۴۵۷۳	۹/۴۲۴۴۹	۹/۴۲۴۵۰
۴	۱۲/۵۶۶۴	۱۲/۶۴۳۷	۱۲/۵۶۵۷	۱۲/۵۶۵۷
۵	۱۵/۷۰۸۰	۱۵/۸۵۹۶	۱۵/۷۰۶۶	۱۵/۷۰۶۸

جدول ۲- عامل بدون بعد فرکانس h/l برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده

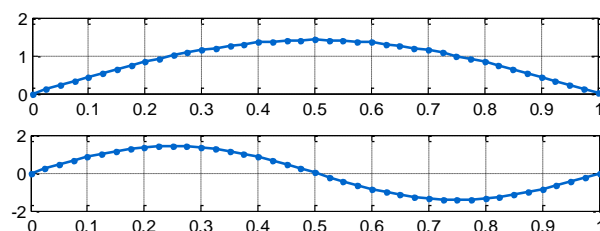
مود	حل اولر	$h/l = 0.01$		
		Ferreira [10]	Lee and Schultz [12]	جزء پیشنهادی
۱	۳/۱۴۱۵۹	۳/۱۴۲۵	۳/۱۴۱۳۳	۳/۱۴۱۳۳
۲	۶/۲۸۳۱۹	۶/۲۹۰۸	۶/۲۸۱۰۶	۶/۲۸۱۰۶
۳	۹/۴۲۴۷۸	۹/۴۵۰۳	۹/۴۱۷۶۱	۹/۴۱۷۶۴
۴	۱۲/۵۶۶۴	۱۲/۶۲۷۱	۱۲/۵۴۹۴	۱۲/۵۴۹۶
۵	۱۵/۷۰۸۰	۱۵/۸۲۶۷	۱۵/۶۷۴۹	۱۵/۶۷۵۴

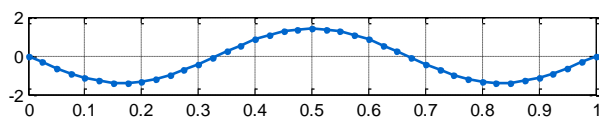
جدول ۳- عامل بدون بعد فرکانس h/l برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده

مود	حل اولر	$h/l = 0.1$		
		Ferreira [10]	Lee and Schultz [12]	جزء پیشنهادی
۱	۳/۱۴۱۵۹	۳/۱۱۶۹	۳/۱۱۵۶۸	۳/۱۱۵۶۹
۲	۶/۲۸۳۱۹	۶/۰۹۹۳	۶/۰۹۰۶۶	۶/۰۹۰۹۴
۳	۹/۴۲۴۷۸	۸/۸۶۶۸	۸/۸۴۰۵۲	۸/۸۴۲۲۹
۴	۱۲/۵۶۶۴	۱۱/۳۹۸۴	۱۱/۳۴۳۱	۱۱/۳۴۹۲
۵	۱۵/۷۰۸۰	۱۳/۷۰۸۹	۱۳/۶۱۳۲	۱۳/۶۲۸۲

جدول ۴- عامل بدون بعد فرکانس h/l برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده

مود	حل اولر	$h/l = 0.2$	
		Lee and Schultz [12]	جزء پیشنهادی
۱	۳/۱۴۱۵۹	۳/۰۴۵۳۳	۳/۰۴۵۳۷
۲	۶/۲۸۳۱۹	۵/۶۷۱۵۵	۵/۶۷۲۳۱
۳	۹/۴۲۴۷۸	۷/۸۳۹۵۲	۷/۸۴۳۳۰
۴	۱۲/۵۶۶۴	۹/۶۵۷۰۹	۹/۶۶۷۷۹
۵	۱۵/۷۰۸۰	۱۱/۲۲۲۰	۱۱/۲۴۴۸





شکل ۳- شکل سه مود اول ارتعاش تیر با تکیه‌گاه‌های ساده

جدول ۵- عامل بدون بعد فرکانس λ_1 برای تیر با تکیه‌گاه‌هایگیردار

مود	حل اولر	$h/l = 0.002$		
		Ferreira [10]	Lee and Schultz [12]	جزء پیشنهادی
۱	۴/۷۳۰۰۴	۴/۷۳۴۵	۴/۷۲۹۹۸	۴/۷۲۹۹۸
۲	۷/۸۵۳۲۰	۷/۸۷۳۶	۷/۸۵۲۹۵	۷/۸۵۲۹۶
۳	۱۰/۹۹۵۶	۱۱/۰۵۰۴	۱۰/۹۹۵۰	۱۰/۹۹۵۰
۴	۱۴/۱۳۷۲	۱۴/۲۵۲۶	۱۴/۱۳۵۹	۱۴/۱۳۶۰
۵	۱۷/۲۷۸۸	۱۷/۴۸۸۸	۱۷/۲۷۶۶	۱۷/۲۷۶۸

جدول ۶- عامل بدون بعد فرکانس λ_1 برای تیر با تکیه‌گاه‌هایگیردار

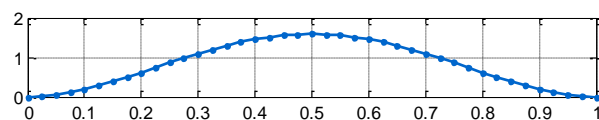
مود	حل اولر	$h/l = 0.01$		
		Ferreira [10]	Lee and Schultz [12]	جزء پیشنهادی
۱	۴/۷۳۰۰۴	۴/۷۳۳۰	۴/۷۲۸۴۰	۴/۷۲۸۴۰
۲	۷/۸۵۳۲۰	۷/۸۶۷۵	۷/۸۴۶۹۰	۷/۸۴۶۹۲
۳	۱۰/۹۹۵۶	۱۱/۰۳۵۱	۱۰/۹۸۰۰	۱۰/۹۸۰۱
۴	۱۴/۱۳۷۲	۱۴/۲۲۱۸	۱۴/۱۰۶۲	۱۴/۱۰۶۴
۵	۱۷/۲۷۸۸	۱۷/۴۳۴۲	۱۷/۲۲۴۶	۱۷/۲۲۵۳

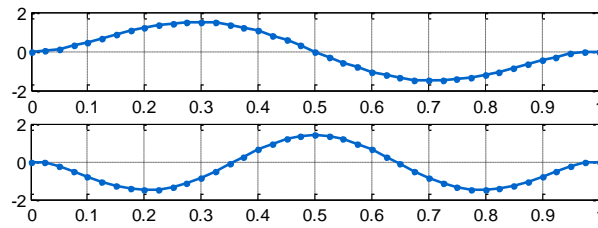
جدول ۷- عامل بدون بعد فرکانس λ_1 برای تیر با تکیه‌گاه‌هایگیردار

مود	حل اولر	$h/l = 0.1$		
		Ferreira [10]	Lee and Schultz [12]	جزء پیشنهادی
۱	۴/۷۳۰۰۴	۴/۵۸۳۵	۴/۵۷۹۵۵	۴/۵۷۹۶۲
۲	۷/۸۵۳۲۰	۷/۳۴۶۸	۷/۳۳۱۲۲	۷/۳۳۱۹۳
۳	۱۰/۹۹۵۶	۹/۸۹۲۴	۹/۸۵۶۱۱	۹/۸۵۹۱۸
۴	۱۴/۱۳۷۲	۱۲/۲۱۱۸	۱۲/۱۴۵۴	۱۲/۱۵۴۰
۵	۱۷/۲۷۸۸	۱۴/۳۳۸۶	۱۴/۲۳۲۴	۱۴/۲۵۱۳

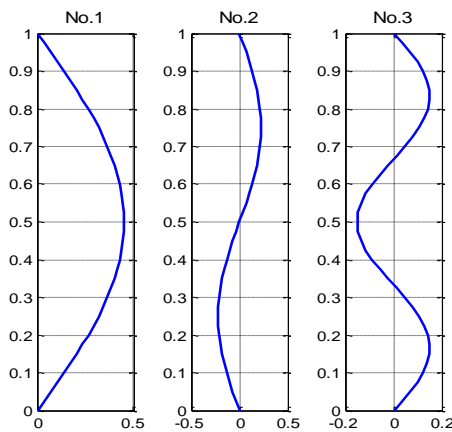
جدول ۸- عامل بدون بعد فرکانس λ_1 برای تیر با تکیه‌گاه‌هایگیردار

مود	حل اولر	$h/l = 0.2$	
		Lee and Schultz [12]	جزء پیشنهادی
۱	۴/۷۳۰۰۴	۴/۲۴۲۰۱	۴/۲۴۲۲۰
۲	۷/۸۵۳۲۰	۶/۴۱۷۹۴	۶/۴۱۹۳۷
۳	۱۰/۹۹۵۶	۸/۲۸۵۳۲	۸/۲۹۰۲۷
۴	۱۴/۱۳۷۲	۹/۹۰۳۷۲	۹/۹۱۵۹۱
۵	۱۷/۲۷۸۸	۱۱/۳۴۸۷	۱۱/۳۷۲۷

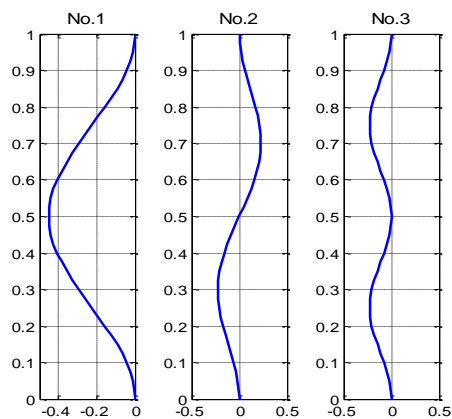




شکل ۴- شکل سه مود اول ارتعاش تیر با تکیه‌گاه‌های گیردار



شکل ۵- شکل سه مود اول کمانش ستون با تکیه‌گاه‌های ساده



شکل ۶- شکل سه مود اول کمانش ستون با تکیه‌گاه‌های گیردار

۸- نتیجه گیری

در این مقاله یک روش جدید رابطه‌سازی اجزای محدود، برای تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد تیرهای با اثر برش پیشنهاد شد. برای این منظور، میدان جابه‌جایی جزء از درجه‌ی سه، میدان دوران آن از درجه‌ی دو و کرنش برشی آن نیز ثابت اختیار گردید. با بهره جویی از تابع انرژی خمشی و برشی تیر و کمینه کردن آن کرنش برشی تیر حساب گردید. با یافتن دیگر عامل‌های مجهول

۷- آزمون عددی دوم (تحلیل کمانش)

در این بخش کارآیی جزء پیشنهادی در تحلیل کمانش، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. برای این منظور بار بحرانی یک ستون با طول $l=1$ ، مدول کشسانی $E=10e7$ ، ضخامت $t=0.001$ و چگالی $\rho=1$ و ضریب پواسون $\nu=0.3$ ، با تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار حساب می‌شود. بار بحرانی ستون با تکیه‌گاه ساده در جدول ۹ و با تکیه‌گاه گیردار در جدول ۱۰ درج شده است. نتایج این جدول نشان دهنده‌ی دقت بالای جزء پیشنهادی می‌باشد.

جدول ۹- بار بحرانی ستون با تکیه‌گاه‌های ساده

L/h	پاسخ تحلیلی	Ferreira [10]	جزء پیشنهادی
۱۰	۸۰۱۳/۸	۸۰۲۱/۸	۸۰۱۳/۸۶
۱۰۰	۸/۲۲۳	۸/۲۳۱	۸/۲۲۲۵
۱۰۰۰	۰/۰۰۸۲	۰/۰۰۸۲	۰/۰۰۸۲۲

جدول ۱۰- بار بحرانی ستون با تکیه‌گاه‌های گیردار

L/h	پاسخ تحلیلی	Ferreira [10]	جزء پیشنهادی
۱۰	۲۹۷۶۶	۲۹۸۷۷	۲۹۷۷۰/۴۲
۱۰۰	۳۲/۸۶۴	۳۲/۹۹۹	۳۲/۸۶۴
۱۰۰۰	۰/۰۳۲۹	۰/۰۳۳۰	۰/۰۳۲۹

همچنین شکل سه مود اول کمانش ستون با تکیه‌گاه‌های ساده در شکل ۵ و با تکیه‌گاه‌های گیردار در شکل ۶ آمده است.

ارزیابی کارایی و دقت جزء ارتعاش آزاد و پایداری تیر با تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار، نتایج مطلوب حاصل شد. نتایج این آزمون نشان دهنده‌ی دقت و کارایی بالای جزء پیشنهادی در محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی و بار بحرانی تیر با شرط‌های مرزی گوناگون می‌باشد.

تابع میدان جابه‌جایی و دوران جزء و همچنین به کار بردن کرنش برشی محاسبه شده، تابع‌های درون‌یاب جزء، به دست آمد. در ادامه با به کار بردن این تابع‌های درون-یاب ماتریس سختی، ماتریس سختی هندسی و ماتریس جرم جزء پیشنهادی به صورت صریح به دست آمد. با

مراجع

- [1] Petyt, M.(2010). Introduction of Finite Element Vibration Analysis, 2nd ed., Cambridge University Press.
- [2] Nickell, R. E., Secor, G. A.(1972).Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 5, pp. 243-253.
- [3] Thomas, D. L. Wilson, J. M., Wilson, R. R. (1973).Timoshenko beam finite elements.Journal of Sound and Vibration, vol. 31, pp. 315-330.
- [4] Dawe, D. J. (1978). A finite element for the vibration analysis of Timoshenko beams.Journal of Sound and Vibration, vol. 60, No. 1, pp. 11-20.
- [5] Kapur, K. K.(1966).Vibrations of a Timoshenko beam using finite element approach.Journal of the Acoustical Society of America, vol. 40, pp. 1058-1063.
- [6] Lees, A. W., Thomas, D. L.(1982). Unified Timoshenko beam finite element.Journal of Sound and Vibration, vol. 80, pp. 355-366.
- [7] Lees, A. W., Thomas, D. L. (1985). Modal hierarchical Timoshenko beam finite elements.Journal of Sound and Vibration, vol. 99, pp. 455-461.
- [8] Webster, J. J.(1967). Free vibration of shells of revolution using ring elements.International Journal for Mechanical Science, vol. 9, pp. 559.
- [9] Rao, S. S., Gupta, R. S. (2001). Finite element vibration analysis of rotating Timoshenko Beams.Journal of Sound and Vibration, vol. 242, pp. 103-124.
- [10] Ferreira A. J. M.(2008). MATLAB codes for finite element analysis.
- [11] Goncalves, P. J. P., Brennan, M. J., Elliott S. J.(2007).Numerical evaluation of high-order modes of vibration in uniform Euler–Bernoulli beams.Journal of Sound and Vibration, vol. 30, pp. 1035–1039.
- [12] Lee, J., Schult, W. W. (2004). Eigen value analysis of Timoshenko beams and axisymmetric Mindlin plates by the pseudospectral method.Journal of Sound and Vibration, vol. 269, pp. 609–621.
- [13] Wieckowski, Z., Golubiewski, M. (2007). Improvement in accuracy of the finite element method in analysis of stability of Euler–Bernoulli and Timoshenko beams. Thin-Walled Structures, vol. 45, pp. 950–954.
- [14] Friedman, Z., Kosmatka, J. B. (1993). An Improved Two Node Timoshenko Beam Finite Element. Computers & Structures, vol. 47, pp. 473–481.
- [15] Bazant, B .Z .P., Cedolin, L.(1991). Stability of structures, Oxford University Press, New York.