

تحلیل کمانش مکانیکی پوسته های استوانه ای جدار ضخیم مدرج تابعی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم

رضا اکبری آلاشتی^{۱*} و سید علی احمدی^۲

اطلاعات مقاله	چکیده
<p>واژگان کلیدی: کمانش مکانیکی، بار بحرانی، مواد مدرج تابعی، پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم، تغییر شکل برشی مرتبه سوم.</p>	<p>در این مقاله، کمانش پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم مورد تحلیل قرار می‌گیرد. معادلات دیفرانسیل سه بعدی حاکم بر کمانش پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم با استفاده از تانسور مرتبه دوم پیولا-کیرشلف به دست آمده و از آنها در راستای ضخامت انتگرال گرفته می‌شود. معادلات حاکم به دست آمده، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم بر حسب مولفه‌های تغییر مکان توسعه داده شده و به صورت تحلیلی حل شده‌اند. فرض می‌شود که خواص ماده در راستای ضخامت مطابق قانون توزیع توانی بر حسب کسر حجمی مواد تشکیل دهنده به آرامی تغییر کند، در حالی که ضریب پواسون ماده ثابت در نظر گرفته شده است. همچنین معادلات کمانش به دست آمده، با استفاده از روش نیمه عددی کوادریچر تفاضلی گسسته سازی شده و به یک سیستم معادلات خطی همگن تبدیل می‌شوند. نتایج به دست آمده از روش تحلیلی با جوابهای حاصله از روش اجزا محدود به دست آمده از نرم‌افزار تجاری انسیس و نتایج ارائه شده در کار دیگر محققان مقایسه گردیده و صحت و درستی آنها بررسی شده است. اثر پارامترهای مختلف شامل شرایط تکیه‌گاهی، کسر حجمی مواد تشکیل دهنده، شرایط مختلف بارگذاری و نسبت‌های هندسی بر رفتار کمانشی پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفته است.</p>

۱- مقدمه

داخل دریا و سازه‌های دریایی اشاره کرد. در سال‌های اخیر پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای متشکل از دو ماده مختلف توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده و تحقیقات زیادی بر روی این ساختارها و سازه‌های متشکل از آنها صورت گرفته است. یک نوع از این مواد، مواد مدرج تابعی (FGM) [۱] هستند که از ترکیب چند ماده به نحوی ساخته شده‌اند که خواص آنها به صورت پیوسته و تدریجی در یک یا چند راستا تغییر می‌کند. از پوسته‌های مدرج تابعی به طور کلی در ساختارهایی که نیاز به خواص حرارتی و مکانیکی بالایی دارند، از قبیل هواپیماها،

پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم به طور گسترده در حوزه‌های مختلف مهندسی از جمله مکانیک، عمران، مهندسی هسته‌ای، کشتی سازی و هوافضا مورد استفاده قرار می‌گیرند. از کاربرد این پوسته‌ها می‌توان به برج‌های خنک کننده، سدها، لوله‌های تحت فشار، لوله‌های حفاری

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: raalashti@nit.ac.ir

۱. استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی بابل

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی

فضاپیماها و سازه های فضایی استفاده می شود. از آنجایی که این سازه ها اغلب در معرض بارگذاریهای همزمان درون صفحه ای و فشرده گی ناشی از فشار جانبی می باشند، لذا بررسی ظرفیت تحمل بار نهایی برای تامین امنیت و پایداری در طراحی این ساختارها ضروری می باشد.

یکی از حالت های مهم خرابی و از کارافتادگی این سازه ها، از دست دادن پایداری ناشی از کمانش می باشد. بررسی کمانش پوسته های استوانه ای مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است. تیموشنکو و گر [۲] توصیف ساده ای برای بار کمانشی پوسته های تحت فشار خارجی با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته های نازک در حالت دو بعدی و کرنش صفحه ای ارائه کردند. کاردوماتس [۳] نشان داد که استفاده از این روش برای پوسته های ضخیم می تواند منجر به بروز خطای بالایی گردد. وانگ و همکاران [۴] روش جدیدی برای به دست آوردن بار کمانشی پوسته های نازک ارائه کردند. ویادجیس و شای [۵] تئوری مناسبی برای پوسته های جدار ضخیم ارائه دادند که در آن اثرات برش های عرضی، کرنش های عرضی و تغییرات غیر خطی تنش های صفحه ای لحاظ گردیده است. اسمیت و همکاران از روش گالرکین برای تخمین بار بحرانی کمانشی پوسته های استوانه ای تحت فشار خارجی بر اساس تئوری های تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه بالا استفاده کردند [۶]. همچنین تحلیل کمانش سه بعدی پوسته های استوانه ای جدار ضخیم تحت بارگذاری ترکیبی توسط کاردوماتس انجام شد [۷]. شریعت و اسلامی [۸] و وو و همکاران [۹] اثر اغتشاشات حرارتی متفاوت را بر کمانش دمایی پوسته مدرج تابعی با شرایط تکیه گاهی ساده، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار دادند. ژائو و همکاران [۱۰-۱۲] از روش ریتز برای آنالیز کمانش حرارتی و مکانیکی پوسته های استوانه ای مدرج تابعی استفاده کردند. هانگ و هان [۱۳] به بحث در مورد رفتار کمانشی و پس از کمانش پوسته های استوانه ای مدرج تابعی تحت بارگذاری ترکیبی از فشرده گی محوری و جانبی پرداختند. در این آنالیز از روابط

غیر خطی کرنش-تغییر مکان برای تغییر شکل های بزرگ و روش انرژی ریتز استفاده شد. در مطالعات شن و چن [۱۴-۱۵] نشان داده شد که در کمانش پوسته ها یک پدیده لایه مرزی رخ می دهد که تغییر مکان های کمانش و پیش از کمانش تغییرات سریعی دارند. آنها یک تئوری لایه مرزی برای کمانش پوسته ها ارائه کردند که اثرات تغییر مکان های غیر خطی پیش از کمانش، تغییر مکان های بزرگ در حالت پس از کمانش و عیوب هندسی اولیه را در بر می گیرد. شن [۱۶] تحلیل پس کمانش پوسته های استوانه ای مدرج تابعی تحت فشرده گی محوری با استفاده از تئوری لایه مرزی، را مورد توجه قرار داد، که مشخص گردید در برخی موارد دارای محاسبات ریاضی سنگین و طولانی می باشد.

در این مقاله معادلات سه بعدی حاکم بر کمانش پوسته های استوانه ای جدار ضخیم با استفاده از تانسور تنش مرتبه دوم پیولا-کیرشهف و بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم توسعه داده شده اند. همچنین از روش نیمه عددی کوادریچر تفاضلی (DQM) برای گسسته سازی و حل معادلات به دست آمده استفاده شده است. پوسته تحت بارگذاری ترکیبی از فشرده گی محور و فشار جانبی و دارای شرایط تکیه گاهی مختلف در دو انتها فرض شده است. همچنین فرض شده خواص مواد مستقل از دما بوده و به صورت پیوسته طبق قانون توزیع توانی بر حسب کسر حجمی مواد تشکیل دهنده در راستای ضخامت تغییر کنند. اثر پارامترهای مختلف شامل شرایط تکیه گاهی، تغییرات توان نمایی، شرایط بارگذاری و نسبت های هندسی بر رفتار کمانشی پوسته استوانه ای جدار ضخیم مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج تحلیلی و عددی به دست آمده از روش های ارائه شده با نتایج به دست آمده از روش اجزا محدود توسط نرم افزار انسیس و نتایج ارائه شده در کارهای دیگر محققان مقایسه شده است.

۲- معادلات حاکم بر مسئله

یک تغییر کوچک نسبت به وضعیت اولیه در نظر گرفته می شود. توابع تغییر مکان متناظر به صورت زیر می-باشند:

$$\begin{aligned} w(r, \theta, x) &= w^0(r, \theta, x) + \alpha \cdot w'(r, \theta, x) \\ v(r, \theta, x) &= v^0(r, \theta, x) + \alpha \cdot v'(r, \theta, x) \\ u(r, \theta, x) &= u^0(r, \theta, x) + \alpha \cdot u'(r, \theta, x) \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن α یک کمیت خیلی کوچک بوده، $w^0(r, \theta, x)$ ، $v^0(r, \theta, x)$ و $u^0(r, \theta, x)$ مولفه‌های تغییر مکان اولیه و $w'(r, \theta, x)$ ، $v'(r, \theta, x)$ و $u'(r, \theta, x)$ مولفه‌های تغییر مکان در حالت تغییر یافته در راستاهای شعاعی، محیطی و محوری می‌باشند. با جایگذاری عبارات معادله (۳) در روابط خطی کرنش-تغییر مکان، عبارات کرنش در وضعیت اغتشاشی به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}(r, \theta, x) &= \varepsilon_{rr}^0(r, \theta, x) + \alpha \cdot \varepsilon'_{rr}(r, \theta, x) \\ \varepsilon_{xx}(r, \theta, x) &= \varepsilon_{xx}^0(r, \theta, x) + \alpha \cdot \varepsilon'_{xx}(r, \theta, x) \\ \varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta, x) &= \varepsilon_{\theta\theta}^0(r, \theta, x) + \alpha \cdot \varepsilon'_{\theta\theta}(r, \theta, x) \\ \gamma_{r\theta}(r, \theta, x) &= \gamma_{r\theta}^0(r, \theta, x) + \alpha \cdot \gamma'_{r\theta}(r, \theta, x) \\ \gamma_{rx}(r, \theta, x) &= \gamma_{rx}^0(r, \theta, x) + \alpha \cdot \gamma'_{rx}(r, \theta, x) \\ \gamma_{x\theta}(r, \theta, x) &= \gamma_{x\theta}^0(r, \theta, x) + \alpha \cdot \gamma'_{x\theta}(r, \theta, x) \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن ε_{ij}^0 مقادیر مولفه‌های کرنش در وضعیت اولیه و ε'_{ij} برای وضعیت ثانویه می‌باشند. روابط تنش-کرنش برای مواد همسانگرد به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (2G + \lambda)\varepsilon_{rr} + \lambda(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{xx}), \quad \tau_{r\theta} = G\varepsilon_{r\theta} \\ \sigma_{\theta\theta} &= (2G + \lambda)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{rr}), \quad \tau_{rx} = G\varepsilon_{rx} \\ \sigma_{xx} &= (2G + \lambda)\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{rr}), \quad \tau_{x\theta} = G\varepsilon_{x\theta} \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن λ و G ثوابت لامه می‌باشند.

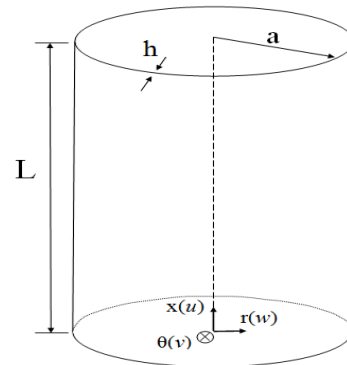
$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \\ \lambda(z) &= \frac{E(z) \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{aligned} \quad (6)$$

با جایگذاری معادلات (۴) در معادلات (۵) برای مولفه‌های تنش داریم:

یک پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم ساخته شده از سرامیک و فلز با شعاع میانی a ، ضخامت h و طول L ، مطابق شکل ۱ در نظر گرفته شده است. مولفه‌های تغییر مکان در راستاهای r ، θ و z به ترتیب با w ، v و u نشان داده می-شوند. فرض شده است ماده تشکیل دهنده پوسته همسانگرد و غیرهمگن باشد و مدول الاستیسیته آن در راستای ضخامت مطابق رابطه داده شده تغییر کند، به طوری که سطح داخلی آن از سرامیک و سطح خارجی آن از فلز خالص تشکیل شده باشد. تغییر کسر حجمی جزء فلزی مطابق قانون توانی زیر تعریف می‌شود [۱۷]:

$$V_m = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k, \quad V_c + V_m = 1 \quad (1)$$

که در آن V_c و V_m به ترتیب بیانگر کسر حجمی فلز و سرامیک، k توان نمایی بوده و نشان دهنده نحوه تغییرات مواد در راستای ضخامت پوسته مدرج تابعی می‌باشد.



شکل ۱- پوسته و مختصات استوانه ای

بنابراین تغییرات مدول الاستیسیته را می‌توان بر اساس رابطه زیر بیان کرد:

$$E(z) = E_c + E_{mc} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \quad (2)$$

$$E_{mc} = E_m - E_c$$

که در آن E_m و E_c به ترتیب مدول الاستیک فلز و سرامیک می‌باشند. فرض شده است که خواص مواد به دما وابسته نبوده و ضریب پواسون ν در راستای ضخامت ثابت باشد. برای موقعیت مکانی در حالت اغتشاش یافته،

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} [\tau_{r\theta}(1 + \varepsilon_{\theta\theta}) + \sigma_{rr}(\varepsilon_{r\theta} - \omega_{r\theta}) + \tau_{rx}(\varepsilon_{\theta x} - \omega_{\theta x})] \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sigma_{\theta\theta}(1 + \varepsilon_{\theta\theta}) + \tau_{r\theta}(\varepsilon_{r\theta} - \omega_{r\theta}) + \tau_{\theta x}(\varepsilon_{\theta x} - \omega_{\theta x})] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} [\tau_{\theta x}(1 + \varepsilon_{\theta\theta}) + \tau_{rx}(\varepsilon_{r\theta} - \omega_{r\theta}) + \sigma_{xx}(\varepsilon_{\theta x} - \omega_{\theta x})] \\ & + \frac{1}{r} [\sigma_{rr}(\varepsilon_{r\theta} - \omega_{r\theta}) + \sigma_{\theta\theta}(\varepsilon_{r\theta} + \omega_{r\theta}) + \tau_{rx}(\varepsilon_{\theta x} - \omega_{\theta x}) \\ & + \tau_{\theta x}(\varepsilon_{rx} + \omega_{rx}) + \tau_{r\theta}(2 + \varepsilon_{\theta\theta} + e_{rr})] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} [\sigma_{rr}(\varepsilon_{rx} - \omega_{rx}) + \tau_{r\theta}(\varepsilon_{\theta x} + \omega_{\theta x}) + \tau_{rx}(1 + \varepsilon_{xx})] \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\tau_{r\theta}(\varepsilon_{rx} - \omega_{rx}) + \sigma_{\theta\theta}(\varepsilon_{\theta x} + \omega_{\theta x}) + \tau_{\theta x}(1 + \varepsilon_{xx})] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} [\tau_{rx}(\varepsilon_{rx} - \omega_{rx}) + \tau_{\theta x}(\varepsilon_{\theta x} + \omega_{\theta x}) + \sigma_{xx}(1 + \varepsilon_{xx})] \\ & + \frac{1}{r} [\sigma_{rr}(\varepsilon_{rx} - \omega_{rx}) + \tau_{r\theta}(\varepsilon_{\theta x} + \omega_{\theta x}) + \tau_{rx}(1 + \varepsilon_{xx})] = 0 \end{aligned}$$

با جایگذاری روابط خطی (۴) و (۷) در معادلات بالا و نگه داشتن ترم‌های خطی بر حسب α مجموعه معادلاتی برای حالت اغتشاش یافته به دست می‌آیند. در شرایط اولیه تنش برشی، کرنش برشی و چرخش‌ها صفر در نظر گرفته می‌شوند. با توجه به اینکه کرنش‌های نرمال اولیه غیر صفر اما خیلی کوچک در نظر گرفته خواهند شد، از معادلات بالا، یک سیستم معادلات دیفرانسیل خطی بر حسب مولفه‌های تغییر مکان حاصل می‌شود که می‌توان آن را به فرم ساده تر زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_{rr}^0 \varepsilon'_{rr} + \sigma'_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{r\theta} + \sigma_{\theta\theta}^0 (\varepsilon'_{r\theta} + \omega'_{r\theta})) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} (\tau'_{rx} + \sigma_{xx}^0 (\varepsilon'_{rx} + \omega'_{rx})) \\ & + \frac{1}{r} (\sigma'_{rr} + \sigma_{rr}^0 \varepsilon'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta} - \sigma_{\theta\theta}^0 \varepsilon'_{\theta\theta}) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial r} (\tau'_{r\theta} + \sigma_{rr}^0 (\varepsilon'_{r\theta} - \omega'_{r\theta})) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{\theta\theta}^0 \varepsilon'_{\theta\theta} + \sigma'_{\theta\theta}) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} (\tau'_{\theta x} + \sigma_{xx}^0 (\varepsilon'_{\theta x} - \omega'_{\theta x})) \\ & + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^0 (\varepsilon'_{r\theta} - \omega'_{r\theta}) + 2\tau'_{r\theta} + \sigma_{\theta\theta}^0 (\varepsilon'_{r\theta} + \omega'_{r\theta})) = 0 \quad (11) \\ & \frac{\partial}{\partial r} (\tau'_{rx} + \sigma_{rr}^0 (\varepsilon'_{rx} - \omega'_{rx})) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{\theta\theta}^0 (\varepsilon'_{\theta x} + \omega'_{\theta x}) + \tau'_{\theta x}) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma'_{xx} + \sigma_{xx}^0 \varepsilon'_{xx}) + \frac{1}{r} (\tau'_{rx} + \sigma_{rr}^0 (\varepsilon'_{rx} - \omega'_{rx})) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta, x) &= \sigma_{rr}^0(r, \theta, x) + \alpha \cdot \sigma'_{rr}(r, \theta, x) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, x) &= \sigma_{\theta\theta}^0(r, \theta, x) + \alpha \cdot \sigma'_{\theta\theta}(r, \theta, x) \\ \sigma_{xx}(r, \theta, x) &= \sigma_{xx}^0(r, \theta, x) + \alpha \cdot \sigma'_{xx}(r, \theta, x) \\ \tau_{r\theta}(r, \theta, x) &= \tau_{r\theta}^0(r, \theta, x) + \alpha \cdot \tau'_{r\theta}(r, \theta, x) \\ \tau_{rx}(r, \theta, x) &= \tau_{rx}^0(r, \theta, x) + \alpha \cdot \tau'_{rx}(r, \theta, x) \\ \tau_{x\theta}(r, \theta, x) &= \tau_{x\theta}^0(r, \theta, x) + \alpha \cdot \tau'_{x\theta}(r, \theta, x) \end{aligned} \quad (7)$$

معادله تعادل با استفاده از تانسور پیولا - کیرشهف به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۸]:

$$\text{div}(\sigma \cdot F^T) = 0, \quad F = I + r \text{gad} \vec{V} \quad (8)$$

که در آن F گرادیان تغییر مکان، \vec{V} بردار تغییر مکان و I تانسور یکه هستند. روابط خطی کرنش - تغییر مکان و چرخش - تغییر مکان در سیستم مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varepsilon_{rx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r}, \quad \varepsilon_{\theta x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \omega_{rx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad \omega_{\theta x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \omega_{r\theta} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

برای مسائل سه بعدی معادله (۸) به ترتیب در راستاهای شعاعی، محیطی و محوری به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} [\sigma_{rr}(1 + \varepsilon_{rr}) + \tau_{r\theta}(\varepsilon_{r\theta} + \omega_{r\theta}) + \tau_{rx}(\varepsilon_{rx} + \omega_{rx})] \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\tau_{r\theta}(1 + \varepsilon_{rr}) + \sigma_{\theta\theta}(\varepsilon_{r\theta} + \omega_{r\theta}) + \tau_{\theta x}(\varepsilon_{rx} + \omega_{rx})] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} [\tau_{rx}(1 + \varepsilon_{rr}) + \tau_{\theta x}(\varepsilon_{r\theta} + \omega_{r\theta}) + \sigma_{xx}(\varepsilon_{rx} + \omega_{rx})] \\ & + \frac{1}{r} [\sigma_{rr}(1 + \varepsilon_{rr}) - \sigma_{\theta\theta}(1 + \varepsilon_{\theta\theta}) + \tau_{rx}(\varepsilon_{rx} + \omega_{rx}) \\ & - \tau_{\theta x}(\varepsilon_{\theta x} - \omega_{\theta x}) + 2\tau_{r\theta}\omega_{r\theta}] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

۳- شرایط مرزی

با استفاده از معادلات تعادل به دست آمده بر اساس تانسور مرتبه دوم پیولا - کیرشهف σ ، شرایط مرزی پوسته به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(F \cdot \sigma) \cdot \bar{n} = \bar{t} \quad (12)$$

که در آن \bar{t} بردار عکس العمل، \bar{n} بردار نرمال یکه خارجی است. با به کار بردن شرط مرزی (۱۲) برای موقعیت تعادل اغتشاش یافته، شرایط مرزی در دیواره‌های جانبی پوسته به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} \left(a + \frac{h}{2}, \theta \right) &= \sigma'_{rr} \left(a - \frac{h}{2}, \theta \right) = 0 \\ \tau'_{r\theta} \left(a + \frac{h}{2}, \theta \right) &= \tau'_{r\theta} \left(a - \frac{h}{2}, \theta \right) = 0 \\ \tau'_{rx} \left(a + \frac{h}{2}, \theta \right) &= \tau'_{rx} \left(a - \frac{h}{2}, \theta \right) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

تنش‌های σ^0_{rr} و $\sigma^0_{\theta\theta}$ ایجاد شده در ضخامت پوسته در اثر اعمال فشار خارجی یکنواخت به صورت روابط زیر تعریف می‌شوند [۱۹]:

$$\begin{aligned} \sigma^0_{\theta\theta} &= -p \left[1 + \left(\frac{R1}{r} \right)^2 \right] \cdot \left[1 - \left(\frac{R1}{R2} \right)^2 \right]^{-1} = f_{\theta\theta} \cdot p \\ \sigma^0_{rr} &= -p \left[1 - \left(\frac{R1}{r} \right)^2 \right] \cdot \left[1 - \left(\frac{R1}{R2} \right)^2 \right]^{-1} = f_{rr} \cdot p \end{aligned} \quad (14)$$

برای لبه‌های انتهایی پوسته استوانه‌ای شرایط مرزی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} w = v = \sigma'_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 && \text{تکیه‌گاه ساده} \\ w = v = u = \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 && \text{تکیه‌گاه گیردار} \\ \sigma'_{xx} = \sigma'_{xr} = \sigma'_{x\theta} &= 0 && \text{تکیه‌گاه آزاد} \end{aligned} \quad (15)$$

۴- حل تحلیلی معادلات حاکم بر کمانش

در این بخش از معادلات پایداری به دست آمده در قبل، یعنی معادلات (۱۱) در راستای ضخامت پوسته انتگرال گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} &\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[r \frac{\partial}{\partial r} (\sigma^0_{rr} \epsilon'_{rr} + \sigma'_{rr}) + r \frac{\partial}{\partial x} (\tau'_{rx} + \sigma^0_{xx} (\epsilon'_{rx} + \omega'_{rx})) \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{r\theta} + \sigma^0_{\theta\theta} (\epsilon'_{r\theta} + \omega'_{r\theta})) \\ &+ (\sigma'_{rr} + \sigma^0_{rr} \epsilon'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta} - \sigma^0_{\theta\theta} \epsilon'_{\theta\theta}) \Big] dz = 0 \\ &\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[r \frac{\partial}{\partial r} (\tau'_{r\theta} + \sigma^0_{rr} (\epsilon'_{r\theta} - \omega'_{r\theta})) \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma^0_{\theta\theta} \epsilon'_{\theta\theta} + \sigma'_{\theta\theta}) + r \frac{\partial}{\partial x} (\tau'_{\theta x} + \sigma^0_{xx} (\epsilon'_{\theta x} - \omega'_{\theta x})) \\ &+ (2\tau'_{r\theta} + \sigma^0_{rr} (\epsilon'_{r\theta} - \omega'_{r\theta}) + \sigma^0_{\theta\theta} (\epsilon'_{r\theta} + \omega'_{r\theta})) \Big] dz = 0 \\ &\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[r \frac{\partial}{\partial r} (\tau'_{rx} + \sigma^0_{rr} (\epsilon'_{rx} - \omega'_{rx})) + \right. \\ &\left. \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma^0_{\theta\theta} (\epsilon'_{\theta x} + \omega'_{\theta x}) + \tau'_{\theta x}) + r \frac{\partial}{\partial x} (\sigma'_{xx} + \sigma^0_{xx} \epsilon'_{xx}) \right. \\ &\left. + (\tau'_{rx} + \sigma^0_{rr} (\epsilon'_{rx} - \omega'_{rx})) \right] dz = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

با انجام ساده سازی و استفاده از تعریف نیروهای منتهجه به صورت (۱۷)، و در نظر گرفتن شرایط مرزی تعریف شده و این حقیقت که $\sigma^0_{rr}(a + h/2, \theta) = -p$ و

$\sigma^0_{rr}(a - h/2, \theta) = 0$ ، معادلات کمانش (۱۶) به صورت زیر در می‌آیند:

$$N_{\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^0_{\theta\theta} dz, \quad Q_{\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma'_{r\theta} dz \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma^0_{\theta\theta} \omega'_{r\theta}) dz - N_{\theta} \\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma^0_{\theta\theta} \epsilon'_{r\theta}) dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma^0_{\theta\theta} \epsilon'_{\theta\theta}) dz \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r (\sigma'_{xx} + \sigma^0_{xx} (\epsilon'_{rx} + \omega'_{rx})) dz = 0 \\ &- (a + \frac{h}{2}) p (\epsilon'_{r\theta}(a + \frac{h}{2}) - \omega'_{r\theta}(a + \frac{h}{2})) + Q_{\theta} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} \\ &+ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma^0_{\theta\theta} \omega'_{r\theta}) dz + \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma^0_{\theta\theta} \epsilon'_{\theta\theta}) dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma^0_{\theta\theta} \epsilon'_{r\theta}) dz \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r (\tau'_{\theta x} + \sigma^0_{xx} (\epsilon'_{\theta x} - \omega'_{\theta x})) dz = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

مکان و چرخش صفحه میانی به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$\begin{aligned}
 w_0(\theta, x) &= A \cdot \sin(m\theta) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\
 v_0(\theta, x) &= B \cdot \cos(m\theta) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\
 u_0(\theta, x) &= C \cdot \sin(m\theta) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\
 \phi_1(\theta, x) &= D \cdot \cos(m\theta) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\
 \phi_2(\theta, x) &= H \cdot \sin(m\theta) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)
 \end{aligned} \tag{۲۲}$$

که در آن m و n بیانگر مدهای کمانشی در راستاهای محیطی و محوری می باشند. با جایگذاری معادلات (۲۲) در روابط حاکم بر منتهجه ها و نتایج آن در معادلات کمانش یعنی معادلات (۱۸) و (۱۹) در نهایت یک سیستم معادلات خطی همگن به دست خواهد آمد. این سیستم معادلات دارای حل غیر بدیهی می باشد که برای آن لازم است دترمینان ماتریس ضرایب ایجاد شده برابر صفر گردد که کمترین مقدار به دست آمده از حل آن، همان مقدار بار کمانشی خواهد بود.

۵- حل عددی معادلات کمانش:

در این بخش معادلات حاکم بر کمانش پوسته های جدار ضخیم، یعنی معادلات (۱۱) با استفاده از روش نیمه عددی کوادریچر تفاضلی (DQM) که نخستین بار توسط بلمن و کاستی [۲۱] معرفی گردید، گسسته سازی و حل خواهند شد. بر اساس این روش می توان مشتق تابع $f(x)$ را با جمع خطی مقادیر تابع در نقاط میدان تقریب زد:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N w_{ij}^{(1)} \cdot f(x_j) \tag{۲۳}$$

for $i = 1, 2, \dots, N$

که در آن $w_{ij}^{(1)}$ ضریب وزنی مشتق مرتبه اول و N تعداد نقاط شبکه در میدان می باشد. روش های مختلفی برای تعیین ماتریس ضرایب وزنی وجود دارد که در [۲۲] آمده است. برای مولفه های تغییر مکان در حالت کمانش می توان فرم هارمونیک را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned}
 & - (a + \frac{h}{2}) p(\epsilon'_{rx(a+\frac{h}{2})} - \omega'_{rx(a+\frac{h}{2})}) \\
 & + \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{\theta\theta}^0 \epsilon'_{\theta x}) dz + \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{\theta\theta}^0 \omega'_{\theta x}) dz \\
 & + \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau'_{\theta x}) dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r(\sigma'_{xx} + \sigma_{xx}^0 \epsilon'_{xx}) dz = 0
 \end{aligned}$$

از آنجایی که برای حل معادلات بالا از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم استفاده می شود، لذا لازم است دو معادله اضافی دیگر یعنی معادلات تعادل گشتاور در راستاهای x و θ نیز به کار گرفته شوند:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a} \frac{\partial M}{\partial \theta} \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x} - Q_x &= 0 \\
 \frac{1}{a} \frac{\partial M}{\partial \theta} + \frac{\partial M}{\partial x} - Q_\theta &= 0
 \end{aligned} \tag{۱۹}$$

که در آن نیروها و گشتاورهای منتهجه با در نظر گرفتن پارامترهای پوسته جدار ضخیم به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned}
 M_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma'_{\theta\theta} dz, M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1 + \frac{z}{a}) z \sigma'_{xx} dz \\
 M_{x\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1 + \frac{z}{a}) z \tau'_{\theta x} dz, M_{\theta x} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \tau'_{\theta x} dz \\
 Q_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1 + \frac{z}{a}) \tau'_{rx} dz
 \end{aligned} \tag{۲۰}$$

مجموعه معادلات (۱۸) و (۱۹) معادلات کمانش پوسته استوانه ای جدار ضخیم را تشکیل می دهند. برای حل معادلات بالا لازم است همه ترم های کرنش و چرخش برحسب مولفه های تغییر مکان نوشته شوند. در این مقاله از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم برای توصیف مولفه های تغییر مکان استفاده شده است [۲۰].

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta, x) &= u_0(\theta, x) + z \phi_1(\theta, x) - \frac{4}{3h^2} z^3 (\phi_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x}) \\
 v(r, \theta, x) &= (1 + \frac{z}{a}) v_0(\theta, x) + z \phi_2(\theta, x) - \frac{4}{3h^2} z^3 (\phi_2 + \frac{1}{a} \frac{\partial w_0}{\partial \theta}) \\
 w(r, \theta, x) &= w_0(\theta, x)
 \end{aligned} \tag{۲۱}$$

که در آن w_0 ، v_0 و u_0 بیانگر تغییر مکان های صفحه میانی در راستاهای r ، θ و x می باشند. با در نظر گرفتن شرایط مرزی ساده در دو انتهای پوسته، مولفه های تغییر

$$\begin{bmatrix} [BB] & [BD] \\ [DB] & [DD] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_b \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [DBG] & [DDG] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_b \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (26)$$

که در آن زیر ماتریس‌های [BB] و [BD] از شرایط مرزی بدست آمده و زیر ماتریس‌های [DB]، [DD]، [DDG]، [DBG] و از معادلات حاکم بر میدان نتیجه می‌شوند. بردار مربوط به مولفه‌های جابه‌جایی در روی مرز و بردار مولفه‌های تغییرمکان در میدان می‌باشد. در نهایت به کمک روش تراکم استاتیکی معادلات بالا به فرم استاندارد زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned} & (-[DBG][BB]^{-1}[BD] + [DDG])^{-1} \\ & \cdot (-[DB][BB]^{-1}[BD] + [DD])[u \ v \ w]^T \\ & - P[I][u \ v \ w]^T = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

با استفاده از حل مسئله مقدارهای ویژه، از رابطه بالا مقادیر p به دست می‌آیند. کمترین مقدار p همان فشار بحرانی کمانش می‌باشد.

۶- بحث و نتایج عددی:

برای بررسی صحت و اعتبار روش ارائه شده در این مقاله، در ابتدا نتایج به دست آمده در این مقاله با نتایج ارائه شده توسط دیگر محققان مقایسه شده است. بارهای بحرانی برای پوسته همسانگرد همگن تحت بارگذاری فشرده‌گی محوری و شرایط تکیه‌گاهی ساده، در جدول ۱ ارائه شده است. نتایج برای پوسته‌های با نسبت شعاع خارجی به داخلی بین ۱,۰۵ تا ۱,۳ برای حالت نسبتاً ضخیم و ۱,۳ برای پوسته‌های ضعیف محاسبه شده‌اند. نتایج بی بعد شده به دست آمده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و حل عددی، با نتایج ارائه شده توسط تیموشنکو [۲]، فلوگه [۲۳] و کاردوماتس [۷] مقایسه شده است. از جدول مشاهده می‌شود نتایج دارای مطابقت خوبی برای پوسته‌های ضعیف می‌باشند.

$$\begin{aligned} w(r, \theta, x) &= B(r, x) \cdot \cos(m\theta) \\ v(r, \theta, x) &= A(r, x) \cdot \sin(m\theta) \\ u(r, \theta, x) &= C(r, x) \cdot \cos(m\theta) \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن m مود کمانش در راستاهای محیطی می‌باشد. با جایگذاری عبارات (۲۴) در روابط کرنش - جابه‌جایی و تنش - کرنش و نتایج آن در معادلات کمانش، می‌توان معادلات تعادل را بر حسب تغییرمکان‌ها استخراج نمود. در نهایت با انتخاب نقاط نمونه با فاصله غیر یکنواخت و استفاده از روش کوادریچر تفاضلی، معادلات کمانش به صورت زیر گسسته می‌شوند:

$$\begin{aligned} & (2G(z) + \lambda(z)) \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(2)} B_{kj} + \frac{(2G(z) + \lambda(z))}{r} \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(1)} B_{kj} \\ & + G(z) \sum_{k=1}^Q c_{jk}^{(2)} B_{ik} + (G(z) + \lambda(z)) \sum_{k=1}^Q \sum_{l=1}^N a_{ik}^{(1)} c_{jl}^{(1)} B_{kl} \\ & - \frac{(2G(z) + \lambda(z) + G(z) \cdot m^2)}{r^2} B_{ij} - \frac{m(3G(z) + \lambda(z))}{r^2} A_{ij} \\ & + \frac{m(G(z) + \lambda(z))}{r} \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(1)} A_{kj} + \sigma_{xx}^0 \sum_{k=1}^Q c_{jk}^{(2)} B_{ik} \\ & + P \left[\frac{df_{rr}}{dr} \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(1)} B_{kj} + f_{rr} \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(2)} B_{kj} + \frac{f_{rr}}{r} \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(1)} B_{kj} \right. \\ & \left. - \frac{2mf_{\theta\theta}}{r^2} A_{ij} - \frac{(m^2 + 1)f_{\theta\theta}}{r^2} B_{ij} \right] = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & G(z) \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(2)} C_{kj} + (G(z) + \lambda(z)) \sum_{k=1}^Q \sum_{l=1}^N a_{ik}^{(1)} c_{jl}^{(1)} B_{kl} \\ & + \frac{(G(z) + \lambda(z))}{r} \sum_{k=1}^Q c_{jk}^{(1)} B_{ik} + (2G(z) + \lambda(z)) \sum_{k=1}^Q c_{jk}^{(2)} A_{ik} \\ & + \frac{m(G(z) + \lambda(z))}{r} \sum_{k=1}^Q c_{jk}^{(1)} A_{ik} + \frac{G(z)}{r} \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(1)} C_{kj} \\ & - \frac{Gm^2}{r^2} C_{ij} + \sigma_{xx}^0 \sum_{k=1}^Q c_{jk}^{(2)} C_{ik} + P \left[\frac{df_{rr}}{dr} \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(1)} C_{kj} - \frac{m^2 f_{\theta\theta}}{r^2} C_{ij} \right. \\ & \left. + f_{rr} \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(2)} C_{kj} + f_{rr} \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(2)} C_{kj} + \frac{f_{rr}}{r} \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(1)} C_{kj} \right] = 0 \end{aligned}$$

پس از گسسته سازی معادلات حاکم بر میدان و شروط مرزی با استفاده از روش کوادریچر، در نهایت دسته معادلاتی به فرم زیر به دست می‌آیند:

جدول ۱- بار بحرانی پوسته های همگن تحت بار محوری، $f = FR_2 / \pi Eh(R_2^2 - R_1^2)$

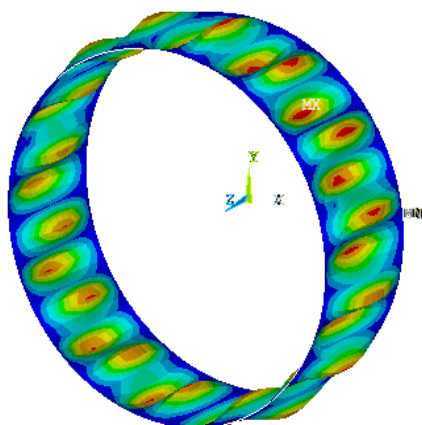
$L/R_2=5$, $R_2=1$ m , $h=R_2-R_1$, $E=14$ GN/m ²						
R_2/R_1	(m, n)	حل عددی	حل تحلیلی	مرجع [۷]	مرجع [۲]	مرجع [۲۳]
۱,۰۵	(۱,۲)	۰,۴۴۱۷	۰,۴۸۵۶	۰,۴۴۲۶	۰,۴۳۴۸	۰,۴۵۲۵
۱,۱۰	(۱,۲)	۰,۳۹۵۶	۰,۴۴۴۶	۰,۳۹۱۰	۰,۳۸۶۵	۰,۴۰۱۹
۱,۱۵	(۱,۲)	۰,۴۲۷۸	۰,۵۲۵۱	۰,۴۵۴۷	۰,۴۳۷۳	۰,۴۷۱۰
۱,۲۰	(۲,۲)	۰,۴۱۷۶	۰,۴۶۵۷	۰,۴۳۷۱	۰,۴۱۸۷	۰,۴۶۲۰
۱,۲۵	(۲,۲)	۰,۴۱۹۱	۰,۴۷۰۹	۰,۴۴۲۶	۰,۴۲۶۹	۰,۴۷۲۸
۱,۳۰	(۱,۱)	۰,۳۷۶۴	۰,۴۱۵۱	۰,۴۴۸۷	۰,۳۸۹۵	۰,۴۹۱۵

نتایج ارائه شده توسط پرابو و همکاران [۲۴] و اسشیندر و برد [۲۵] مقایسه شده است. در شکل ۲-الف و ۲-ب شکل مودهای متناظر با فشار بحرانی، به دست آمده از نرم افزار انسیس نشان داده شده است.

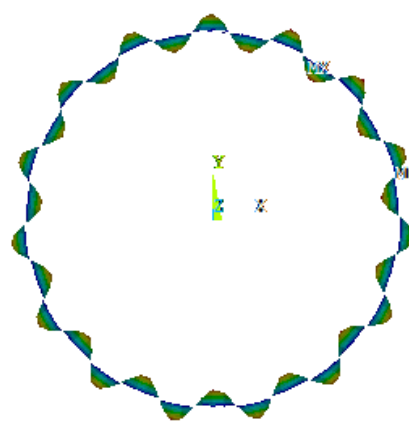
برای بررسی نتایج به دست آمده توسط نرم افزار انسیس، فشار کمانشی ویژه برای یک پوسته استوانه ای جدار نازک تحت فشار خارجی در جدول ۲ آورده شده است. نتایج به دست آمده از حل تحلیلی با جوابهای اجزا محدود و

جدول ۲- مقایسه فشار بحرانی کمانشی (Kpa)

$a=1.9863$ m , $L=1.45$ m , $h=4.98$ mm , $E=210$ GN/m ² , $(m, n)=(15, 1)$			
حل تحلیلی	حل اجزا محدود	پرابو و همکاران [۲۴]	اسشیندر و برد [۲۵]
۱۱۰,۹۴	۱۱۷,۳	۱۱۰,۶	۱۱۱,۲



ب

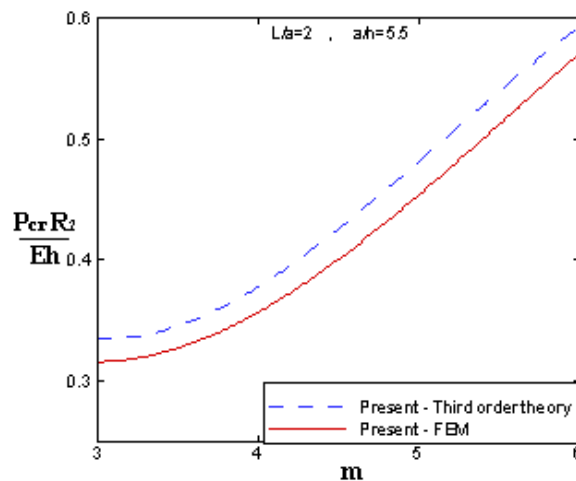


الف

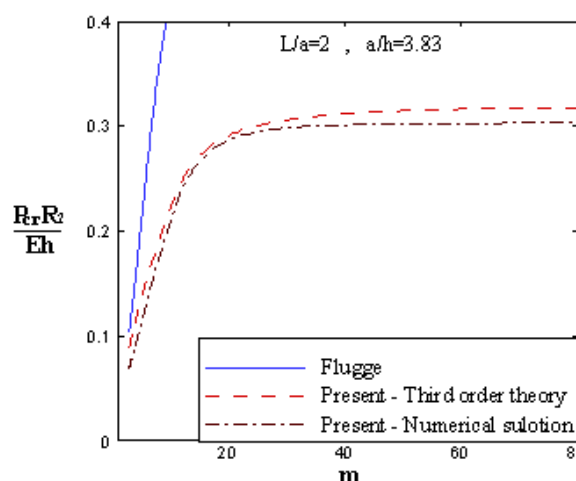
شکل ۲- شکل موده های کمانش. (الف) نمای مقابل، (ب) نمای ایزومتریک.

می‌شود که تغییر شکل‌های برشی به راستای ضخامت وابسته نباشند، بنابراین کرنش‌های برشی عرضی قابل صرف نظر کردن می‌باشند. انتظار می‌رود که تئورهای کلاسیک پوسته‌های جدار نازک نسبت‌های مختلفی از a/h در محدوده پوسته جدار نازک ارائه دهد. اما استفاده از این چنین تئوری‌هایی برای پوسته‌های نسبتاً ضخیم و ضخیم می‌تواند منجر به بروز خطاهای زیادی در محاسبه تنش‌ها و تغییر مکان‌ها گردد. همانگونه که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، روش ارائه شده توسط فلوگه در تخمین درست بار بحرانی برای پوسته‌ها با نسبت‌های بزرگ a/h ناتوان است.

فشارهای بحرانی بی بعد شده در حالت بارگذاری فشار جانبی خالص برای مدهای کمانش مختلف پوسته جدار ضخیم همسانگرد و همگن در شکل‌های ۳ و ۴ رسم شده است. نتایج به دست آمده از حل تحلیلی معادلات کمانش با نتایج اجزا محدود مقایسه شده‌اند. از شکل ۳ مشاهده می‌شود که نتایج به دست آمده دارای مطابقت خوبی با جواب‌های اجزا محدود می‌باشند. همچنین از شکل ۴ مشخص می‌شود که فشار بحرانی کمانشی به ازای شکل مودهای بالاتر به یک مقدار مشخص همگرا می‌شود. در تئوری ارائه شده برای پوسته‌های جدار نازک، از تنش‌های نرمال در جهت شعاعی صرف نظر شده و فرض



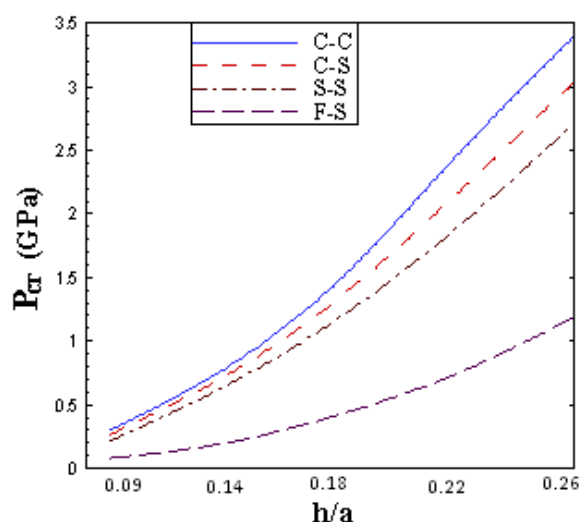
شکل ۳- فشار بحرانی کمانشی در برابر مد کمانشی m برای یک پوسته جدار ضخیم همگن



شکل ۴- فشار بحرانی کمانشی و مقایسه با تئوری کلاسیک پوسته‌های جدار نازک

شده است. فرض شده است که پوسته دارای نسبت طول به شعاع میانی $L/a=1$ بوده و تحت بارگذاری فشار جانبی یکنواخت خالص باشد. مشاهده می شود که پوسته با شرایط تکیه گاهی گیردار در دو انتها دارای بیشترین فشار کمانشی بوده و در حالت یک انتها آزاد فشار بحرانی شدیداً کاهش می یابد.

در ادامه، تاثیر شرایط مرزی بر روی رفتار کمانشی پوسته های استوانه ای جدار ضخیم بررسی می شود. برای پوسته استوانه ای، شرایط تکیه گاهی مختلف ساده S، گیردار C و آزاد F فرض شده است. در شکل ۵ تغییرات فشار بحرانی کمانشی به دست آمده از روش نیمه عددی کوادریچر، برای پوسته های جدار ضخیم همگن $k=0$ با نسبت های مختلف h/a و شرایط مرزی گوناگون نشان



شکل ۵- تاثیر شروط مرزی بر فشار کمانشی پوسته های استوانه ای جدار ضخیم.

بحرانی کمانشی و مدهای کمانش متناظر آنها برای مقادیر مختلف اندیس کسر حجمی k برای یک پوسته جدار ضخیم مدرج تابعی تحت فشار جانبی خالص در جدول ۳ داده شده است. همچنان که در جدول نشان داده شده است، با افزایش مقدار k فشار کمانشی نیز افزایش می یابد. همچنین مشاهده می شود که نتایج حل تحلیلی به خوبی با نتایج اجزا محدود، به ویژه برای مقادیر بزرگتر مدهای کمانش مطابقت می نمایند.

به منظور تشریح نتایج به دست آمده از روش تحلیلی ارائه شده برای پوسته های غیر همگن، پوسته استوانه ای مدرج تابعی متشکل از آلومینیوم و آلومینا در نظر گرفته شده است. فرض شده است که مدول الاستیسیته مستقل از دما باشد و طبق قانون توزیع توانی کسر حجمی مواد تشکیل دهنده، در راستای ضخامت پوسته به صورت پیوسته و به آرامی تغییر کند. مدول الاستیسیته آلومینیوم در سطح خارجی پوسته و آلومینا در سطح داخلی آن به ترتیب برابر و فرض می شوند. فشارهای

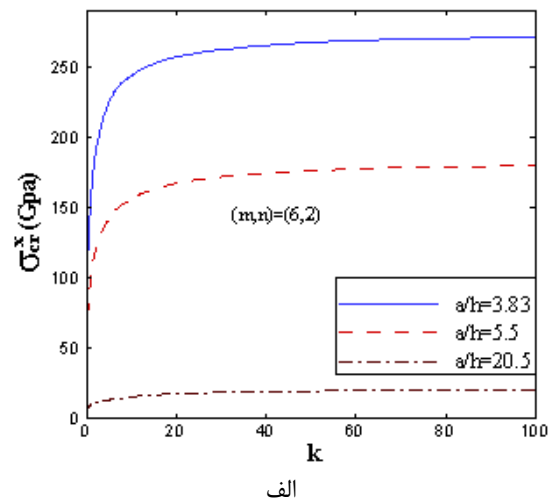
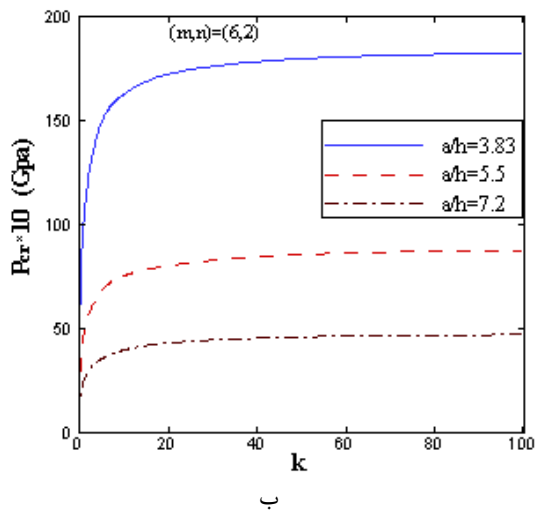
جدول ۳- فشار بحرانی کمانشی (GPa) برای پوسته جدار ضخیم مدرج تابعی

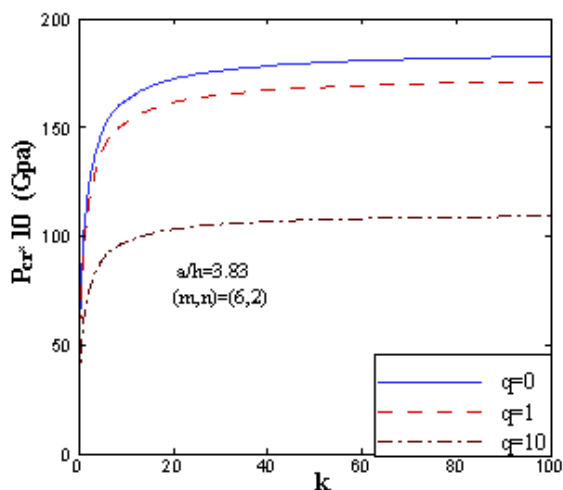
$a/h=5.5, L=5 \text{ m}$				
k	حل تحلیلی	(m, n)	حل اجزا محدود	% خطا
۰	۰,۷۹۳	(۲,۲)	۰,۷۲۲	۸,۹۲
	۰,۸۱۷	(۵,۱)	۰,۷۶۵	۶,۳۶
	۰,۹۲۷	(۵,۲)	۰,۸۲۹	۱۱,۴
	۲,۰۴۳	(۱۰,۲)	۱,۹۸۷	۲,۷۴

۱	۲,۰۳۹	(۲,۲)	۲,۳۰۹	۱۱,۷
	۲,۳۰۳	(۵,۱)	۲,۲۵۶	۲
	۲,۴۹۶	(۵,۲)	۲,۴۴۶	۲
	۶,۰۵۸	(۱۰,۲)	۵,۹۸۵	۱,۲
۸	۲,۲۶۲	(۴,۱)	۲,۵۲۹	۱۰,۶
	۳,۴۹	(۵,۱)	۳,۶۹	۵,۴
	۳,۷۵۵	(۵,۲)	۴,۰۱۱	۶,۳۸
	۹,۴۳۷	(۱۰,۲)	۹,۷۸۹	۳,۶

هستند. تغییرات فشار کمانشی بر حسب k برای پوسته تحت بارگذاری ترکیبی نیز در شکل ۶-ج نشان داده شده است. در این حالت تنش محوری به صورت ضربی از فشار جانبی به صورت $\sigma_x = q \cdot p$ در نظر گرفته شده است، که در آن q به عنوان ضریب بار تعریف می‌شود. از شکل نتیجه گرفته می‌شود که فشار جانبی کمانشی با افزایش ضریب بار یا به عبارتی افزایش تنش محوری، کاهش می‌یابد.

تغییرات تنش بحرانی به دست آمده از حل تحلیلی برای پوسته جدار ضخیم با نسبت $L/a=2$ ، تحت بارگذاری‌های فشار جانبی و فشرده‌گی محوری، در برابر اندیس کسر حجمی k در شکل‌های ۶-الف و ۶-ب نشان داده شده است. پارامترهای هندسی پوسته در شکل آورده شده‌اند. از شکل‌ها اینگونه فهمیده می‌شود که با افزایش مقدار k تنش بحرانی کمانشی افزایش یافته و به یک مقدار حدی میل می‌کند. دلیل اصلی این افزایش را می‌توان اینگونه بیان کرد که برای مقادیر بزرگ k ماده تشکیل دهنده پوسته، غنی از جزء سرامیکی خواهد شد که معمولاً دارای سختی بیشتری نسبت به مواد فلزی



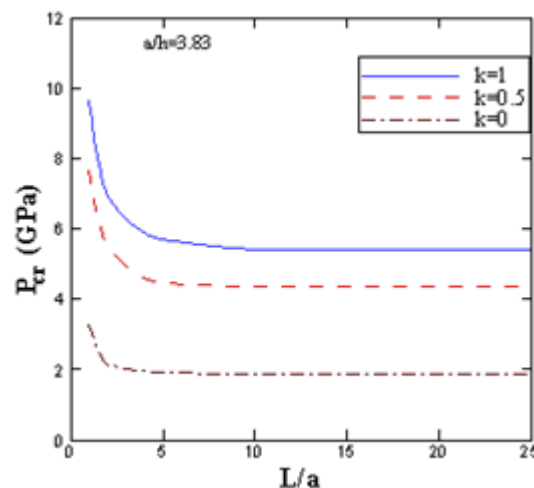
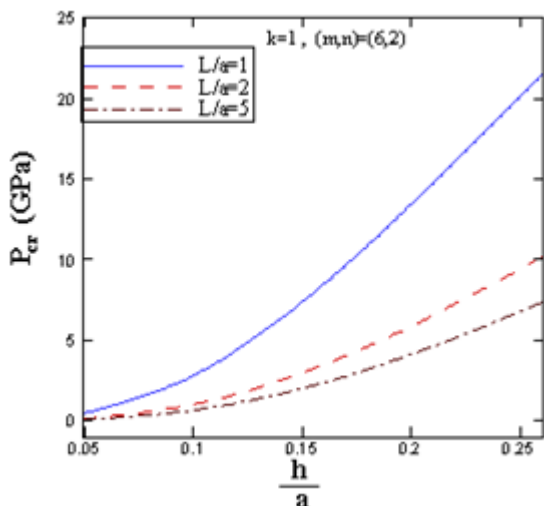


ج

شکل ۶- اثر اندیس کسر حجمی k بر بار کمانشی. الف) فشردگی محوری. ب) فشار جانبی. ج) بارگذاری ترکیبی

نسبت L/a فشار کمانشی پوسته ها کاهش می یابد و برای مقادیر بزرگتر آن به یک مقدار ثابت نزدیک می شوند. همچنین می توان نتیجه گرفت که نسبت L/a در تغییر بار بحرانی کمانشی موثر تر از نسبت L/a می باشد.

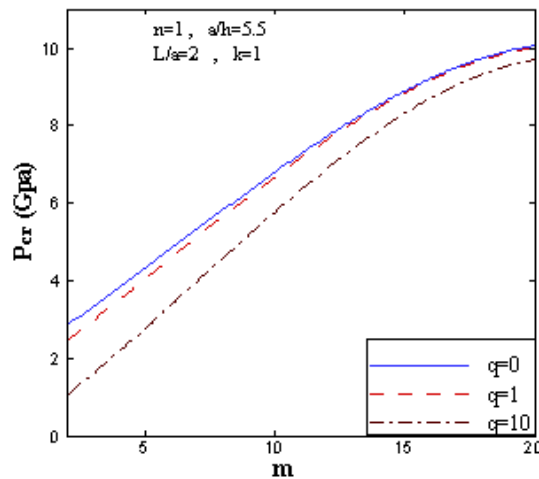
اثر پارامترهای هندسی بر رفتار کمانشی پوسته های جدار ضخیم مدرج تابعی با نسبت های مختلف طول به شعاع میانی L/a و ضخامت به شعاع میانی h/a تحت فشار جانبی خالص در شکل های ۷ نشان داده شده است. از این شکل ها مشاهده می شود که با افزایش



شکل ۷- اثر پارامترهای هندسی بر رفتار کمانشی پوسته مدرج تابعی تحت فشار خارجی

فشردگی محوری تاثیر بیشتری بر فشار کمانشی دارد، اما برای مقادیرهای بزرگ m نتایج به سمت بارهای کمانشی پوسته تحت بارگذاری فشار جانبی خالص میل می کنند.

تغییرات فشار کمانشی به دست آمده از حل تحلیلی، با ضریب بار q ، برای پوسته مدرج تابعی $k=1$ تحت بارگذاری ترکیبی در شکل ۸ نشان داده شده است. از شکل می توان نتیجه گرفت، برای مدهای کمانش کوچکتر،



شکل ۸- بار بحرانی کمانشی در برابر m بارگذاری ترکیبی

۷- بحث و بررسی

در مقاله ارائه شده، معادلات پایداری پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم مدرج تابعی با استفاده از حل الاستیسیته سه بعدی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم پوسته‌ها و روابط خطی کرنش-جابجایی به دست آمده‌اند. فرض شده است که خواص مواد مستقل از دما بوده و طبق قانون ساده توزیع توانی بر حسب کسر حجمی مواد سازنده، در راستای ضخامت پوسته دارای تغییرات پیوسته باشد. آنالیز کمانش چنین پوسته‌هایی تحت بارگذاری‌های مختلف مکانیکی با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف دو انتهای آن انجام شده است. همچنین از روش کوادریچر تفاضلی بزای گسسته سازی و حل معادلات استفاده شده است.

نتایج تحلیلی و اجزا محدود برای بار کمانشی پوسته مدرج تابعی تشکیل شده از آلومینیوم و آلومینا ارائه شده است. اثر شرایط مرزی، کسر حجمی مواد سازنده، پارامتر-های هندسی پوسته و شرایط بارگذاری بر رفتار کمانشی

پوسته‌های جدار ضخیم مدرج تابعی مورد توجه قرار گرفته است. با مقایسه نتایج به دست آمده با نتایج دیگر محققان مشخص شده است که روش‌های ارائه شده در تخمین بار بحرانی پوسته‌های جدار ضخیم از تئوری‌های کلاسیک پوسته‌های نازک توانا تر می‌باشند. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش کسر حجمی سرامیک در ساختار پوسته بار بحرانی کمانشی افزایش می‌یابد. دلیل این افزایش، افزایش سختی پوسته به علت غنی شدن از سرامیک با افزایش k می‌باشد. همچنین مشخص شده است که با افزایش ضریب بار، فشار جانبی کمانشی کاهش می‌یابد. برای مد‌های اولیه کمانش بار محوری تاثیر قابل توجهی در کاهش فشار بحرانی دارد. اما، برای مد‌های کمانش بزرگتر در حالت بارگذاری ترکیبی نتایج به بارهای بحرانی در حالت بارگذاری فشار جانبی خالص نزدیک می‌شوند. همچنین نتایج نشان می‌دهند که با افزایش نسبت طول به شعاع میانی، بار بحرانی کمانشی کاهش یافته و برای مقادیر بزرگ آن به یک عدد مشخص میل می‌کند.

مراجع:

- [1] Koizumi, M. (1993), "The concept of FGM. Ceramic Transactions", Functionally Gradient Materials. 34, 3-10.
- [2] Timoshenko, S.P., Gere, J.M. (1961), "Theory of Elastic Stability". McGraw-Hill Book Company.
- [3] Kardomateas, G.A. (1993), "Buckling of thick orthotropic cylindrical shell under external pressure". J. Appl. Mechanics. Transactions of ASME, Vol. 60, pp. 195-202.

- [4] Wang, X., Xiao, Jun., Zhang, Y.C. (2004), "A method for solving the buckling problem of thin-wall shell". *Int. J. pressure vessels and piping*, Vol. 81, pp. 907-912.
- [5] Voyiadjis, G.Z., Baluch, M.H. (1991), "A refined two-dimensional theory for thick cylindrical shell". *Int. J. Solids and structures*, Vol. 27, No. 3, pp. 261-282.
- [6] Simitse, G.J., Tabiei, A., Anastasiadis, J.S. (1993), "Buckling of moderately thick, laminated cylindrical shells under lateral pressure". *Compos. Eng.*, Vol. 3, No. 5, 409.
- [7] Kardomateas, G.A. (1996), "Benchmark three-dimensional elasticity solution for the buckling of thick orthotropic cylindrical shells". *J. Appl. Mech. (ASME)*, Vol. 5, 569.
- [8] Shahsiah, R., Eslami, M.R. (2003), "Thermal buckling of functionally graded cylindrical shell", *J. Thermal Stresses*, Vol. 26, pp. 277-294.
- [9] Wu, L.H., Jiang, Z.Q., Liu, J. (2005), "Thermoelastic stability of functionally graded cylindrical shells". *Compos. Struct.*, Vol. 70, pp. 60-68.
- [10] Zhao, X., Liew, K.M. (2009), "Geometrically nonlinear analysis of functionally graded shells". *Int. J. Mechanical Sciences*, Vol. 51, pp. 131-144.
- [11] Zhao, X., Liew, K.M. (2010), "A mesh-free method for analysis of the thermal and mechanical buckling of functionally graded cylindrical shell panels". *Computational Mechanics*, Vol. 45, pp. 297-310.
- [12] Zhao, X., Yang, Y., Liew, K.M. (2007), "Geometrically nonlinear analysis of cylindrical shells using the element-free kp-Ritz method". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 31, pp. 783-792.
- [13] Huang, H., Han, Q. (2009), "Nonlinear buckling and postbuckling of heated functionally graded cylindrical shells under combined axial compression and radial pressure". *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 44, No. 2, pp. 209-18.
- [14] Shen, H.S., Chen, T.Y. (1988), "A boundary layer theory for the buckling of thin cylindrical shells under external pressure". *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 9, pp. 557-71.
- [15] Shen, H.S., Chen, T.Y. (1990), "A boundary layer theory for the buckling of thin cylindrical shells under axial compression". In: Chien WZ, Fu ZZ, editors. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics in China*, vol. 2. Beijing, China: International Academic Publishers, pp. 155-72.
- [16] Shen, H.S., (2002). "Postbuckling analysis of axially-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments". *Composites Science and Technology*, Vol. 62, pp. 977-987.
- [17] Reddy, J.N., Chin, C.D. (1998), "Thermoelastical Analysis of Functional Graded Cylinders and Plates". *J. Therm. Stresses*, vol. 21, pp. 593-626.
- [18] Ciarlet, P.G. (1988). "Mathematical Elasticity". Vol. I, Three Dimensional Elasticity, North Holland, Amsterdam.
- [19] Lai, W.M., Rubin, D., Krepl, E. (1996), "Introduction to Continuum Mechanics". Third ed. Butterworth-Heinemann, Massachusetts.
- [20] Reddy, J.N. (2004), "Mechanics of laminated composite plates and shells". Theory and analysis. Boca Raton: CRC Press LLC;
- [21] Bellman, R. E., Casti, J. (1971), "Differential quadrature and long term Integration". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 34, No. 1, pp.235-238.
- [22] shu, C. (2000) "Differential quadrature and its application in Engineering", London, Springer-Verlag.
- [23] Flugge, W. (1960), "Stresses in shells". Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [24] Prabu, B., Rathinam, N., Srinivasan, R., Naarayan, K.A.S. (2009), "Finite element analysis of buckling of thin cylindrical shell subjected to uniform external pressure". *J. Solid Mechanics*, Vol. 1, No. 2, pp. 148-158.
- [25] Schiender, W., Brede, A. (2005), "Consistent equivalent geometric imperfections for the numerical buckling strength verification of cylindrical shells under uniform external pressure". *Thin-Walled Structures*. Vol. 43, No. 2, pp. 175 - 188.