

ارتعاشات آزاد تیر پس کمانه شده ترک دار با استفاده از روش کوادراتور دیفرانسیلی

پیمان جمشیدی مقدم^۱، شاپور مرادی^{۲*}

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>در این پژوهش ارتعاشات آزاد تیر کمانه شده ترک دار به کمک روش کوادراتور دیفرانسیلی بررسی شده است. ترک بصورت باز در نظر گرفته شده و با استفاده از فنر خطی بدون جرم مدل سازی می گردد. تیر به دو بخش تقسیم شده و معادلات حاکم بر مسئله ارتعاشات تیر کمانه شده در مختصات مماسی به دست می آیند. این معادلات یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی غیرخطی را تشکیل می دهند. به منظور حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی استاتیکی ابتدا معادلات با روش کوادراتور دیفرانسیلی گسسته شده، سپس دستگاه معادلات جبری غیرخطی با استفاده از روش طول قوس حل می شوند. همچنین با توجه به کوچکتر بودن دامنه حرکت ارتعاشات آزاد تیر نسبت به دامنه حرکت استاتیکی، معادلات ارتعاشی خطی می گردند. برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل ارتعاشی خطی شده، این معادلات با روش کوادراتور دیفرانسیلی گسسته شده و مقادیر به دست آمده از حل استاتیکی در دستگاه معادلات گسسته شده دینامیکی جای گذاری می شوند. در پایان با حل مسئله مقدار ویژه استاندارد فرکانس های طبیعی و شکل مودهای تیر کمانه شده ترک دار به دست می آیند. جهت بررسی صحت روش عددی ارائه شده، نتایج حاصل با نتایج روش اجزاء محدود مقایسه می گردند. نتایج به دست آمده دقت بسیار خوب و کارایی روش پیشنهادی را نشان می دهد.</p>	<p>واژگان کلیدی: ترک، ارتعاشات تیر، پس کمانش، روش کوادراتور دیفرانسیلی.</p>

۱- مقدمه

به همین دلیل برای حل از روش های عددی استفاده شده است.

نایفه و همکاران [۱] مودهای ارتعاشی تیر کمانه شده را به صورت تحلیلی و آزمایشگاهی بررسی کردند. آن ها با در نظر گرفتن شکل استاتیکی تیر کمانه شده متناظر با n امین مود کمانشی، حل دقیقی برای مودها و فرکانس های تیر کمانه شده دو سر گیردار، دو سر مفصل و یک سر گیردار-یک سر مفصل به دست آوردند. آدسی و همکاران [۲] ارتعاش نامیرای تیری که جرم متمرکزی در وسط آن قرار داشت را حول وضعیت پس کمانش آن با

وجود ترک باعث کاهش استحکام سازه ها و رشد آن ممکن است به انهدام سازه و خسارات جبران ناپذیر منجر گردد. از این رو محققین بسیاری در زمینه های متفاوت سازه های ترک دار را بررسی نموده اند. یکی از این زمینه ها بررسی ارتعاشات سازه های ترک دار تحت بار می باشد. با توجه به ماهیت مسئله، حل تحلیلی آن دشوار بوده

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: moradis@scu.ac.ir

۱. کارشناس ارشد مهندسی مکانیک

۲. دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز

استفاده از مکانیک شکست ترک به صورت فنر خطی چرخشی بدون جرم مدل سازی می گردد. همچنین، ترک به صورت لبه ای و باز در نظر گرفته می شود. معادلات حاکم بر مسئله ارتعاشات تیر کمانه شده در مختصات مماسی به دست آمده، که این معادلات در واقع یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی غیرخطی را تشکیل می دهند. با توجه به این که دامنه حرکت ارتعاشات آزاد تیر بسیار کوچک تر از دامنه حرکت استاتیکی (حالت تعادل) است، پاسخ کلی سیستم به صورت مجموع پاسخ حرکت استاتیکی و ارتعاشی در نظر گرفته شده و معادلات دیفرانسیل ارتعاشی خطی می گردند. پاسخ حرکت تعادلی و ارتعاشی به ترتیب با حل معادلات استاتیکی و دینامیکی به دست می آیند. به منظور حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی استاتیکی ابتدا معادلات با روش کوادراتور دیفرانسیلی گسسته می شوند. سپس دستگاه معادلات جبری غیرخطی با استفاده از روش طول قوس حل می شوند. برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل ارتعاشی خطی شده همانند حالت استاتیکی ابتدا معادلات با روش کوادراتور دیفرانسیلی گسسته شده، سپس مقادیر به دست آمده از حل معادلات استاتیکی در دستگاه معادلات گسسته شده جای گذاری می گردند. دستگاه معادلات به دست آمده یک مسئله مقدار ویژه غیر استاندارد می باشد که پس از تبدیل آن به یک مسئله مقدار ویژه استاندارد و حل آن، فرکانس های تیر کمانه شده ترک دار و شکل مودهای متناظر با آن به دست می آیند.

۲- تئوری

۲-۱- مدل سازی ترک

برای بررسی ارتعاشات آزاد تیر کمانه شده ترک دار، تیری دو سر گیردار مشابه شکل ۱ به طول l ، ضخامت h ، که دارای ترکی به عمق a و محل l_c می باشد، و تحت نیروی محوری فشاری p است در نظر گرفته می شود.

صرف نظر از اثر اینرسی دورانی بررسی نمودند. آن ها در تحلیل پس کمانش با توجه به حرکت تکیه گاه غلطکی به سوی تکیه گاه مفصلی، تیر را به صورت قابل کشش مدل کردند. در تحلیل ارتعاشات آزاد، آن ها تیر را به صورت غیرقابل کشش در نظر گرفته، و در نهایت مسئله را با دو روش نیمه تحلیلی بر اساس گسسته سازی گالرکین و اجزاء محدود حل نمودند. سانتیلان و همکاران [۳] مسئله پس کمانش و ارتعاشات تیر سنگین (Heavy beam) با دامنه نوسان کم حول وضعیت تعادل پس کمانش را به صورت تئوری و آزمایشگاهی بررسی نمودند. آن ها تیر دو سر گیردار را به صورت الاستیک غیرقابل کشش، بر روی فوندانسیون صلب افقی و یا شیب دار در نظر گرفته و روش شو تینگ را برای حل معادلات خود به کار بردند. نئوکریچ و همکاران [۴] ارتعاشات با دامنه کوچک حول وضعیت پس کمانش میله دو سر گیردار را بررسی نمودند. آن ها مدل قابل کشش و غیرقابل کشش را به دو صورت تحلیلی و عددی حل نمودند. سیلوا و گومز [۵] با انجام تحلیل مودال تجربی بر روی شانزده تیر ترک دار با تکیه گاه آزاد، فرکانس های تجربی اول تا چهارم را استخراج کرده، تاثیر محل و عمق ترک را بر روی فرکانس های طبیعی بررسی نمودند. یانگ و چن [۶] رفتار ارتعاشی و کمانشی تیرهای با جنس متغیر در ضخامت با ترک لبه ای را بررسی نمودند. آن ها در تحلیل رفتار تیر از تئوری اولر- برنولی و برای مدل سازی ترک از فنر چرخشی استفاده نمودند. در ادامه، حل تحلیلی برای فرکانس های طبیعی، بار بحرانی کمانشی و شکل مودهای متناظر را برای شرایط مرزی تیر یک سر گیردار، دو سر مفصل و دو سر گیردار ارائه نمودند. کاراگاس و همکاران [۷] با استفاده از روش تجربی و روش اجزاء محدود اثر عمق و محل ترک را بر فرکانس طبیعی اول و بار کمانشی تیر یک سر گیردار بررسی نمودند.

از بررسی های انجام گرفته مشخص است که تاکنون تحلیل رفتار ارتعاشی تیر کمانه شده ترک دار مورد بررسی قرار نگرفته است. هدف از این پژوهش بررسی رفتار ارتعاشی تیر کمانه شده ترک دار است. برای این منظور با

از بارگذاری می‌باشد که با آن نقص هندسی در تیر مدل می‌گردد.

$$\frac{\partial w^j}{\partial s} = \left(1 + \frac{n^j}{EA}\right) \cos \theta^j - \cos \theta_0^j$$

$$\frac{\partial u^j}{\partial s} = \left(1 + \frac{n^j}{EA}\right) \sin \theta^j - \sin \theta_0^j$$

$$\frac{\partial m^j}{\partial s} - q^j = 0, \quad j = 1, 2 \quad (3)$$

$$EI \left[\frac{\partial \theta^j}{\partial s} - \frac{\partial \theta_0^j}{\partial s} \right] - m^j = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (n^j \cos \theta^j) + \frac{\partial}{\partial s} (q^j \sin \theta^j) = \rho \dot{w}^j$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (n^j \sin \theta^j) - \frac{\partial}{\partial s} (q^j \cos \theta^j) = \rho \ddot{u}^j$$

n و q به ترتیب نیروهای محوری و برشی و m ممان خمشی می‌باشند. A سطح مقطع تیر، I ممان اینرسی سطح و ρ جرم بر واحد طول هستند. در صورتی که متغیرها با روابط (۴) بی‌بعد گردند [۳ و ۱۰].

$$S = \frac{s}{l}, \quad L = \frac{l}{l} = 1, \quad L^j = \frac{l^j}{l}, \quad U^j = \frac{u^j}{l},$$

$$W^j = \frac{w^j}{l}, \quad K = \frac{Al^2}{I}, \quad N^j = \frac{n^j l^2}{EI},$$

$$Q^j = \frac{q^j l^2}{EI}, \quad M^j = \frac{m^j l}{EI}, \quad P = \frac{pl^2}{EI},$$

$$T = \frac{t}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \quad \Omega = \omega l^2 \sqrt{\frac{\rho}{EI}}.$$

که ω فرکانس طبیعی سیستم و t زمان می‌باشند، روابط (۳) به صورت روابط (۵) در می‌آیند.

$$\frac{\partial W^j}{\partial S} = \left(1 + \frac{N^j}{K}\right) \cos \theta^j - \cos \theta_0^j$$

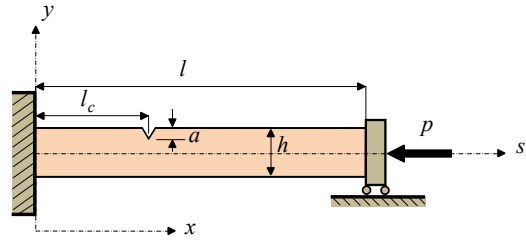
$$\frac{\partial U^j}{\partial S} = \left(1 + \frac{N^j}{K}\right) \sin \theta^j - \sin \theta_0^j$$

$$\frac{\partial M^j}{\partial S} - Q^j = 0, \quad j = 1, 2 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta^j}{\partial S} + \frac{\partial \theta_0^j}{\partial S} - M^j = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial S} (N^j \cos \theta^j) + \frac{\partial}{\partial S} (Q^j \sin \theta^j) = \dot{W}^j$$

$$\frac{\partial}{\partial S} (N^j \sin \theta^j) - \frac{\partial}{\partial S} (Q^j \cos \theta^j) = \dot{U}^j$$



شکل ۱- تیر ترک‌دار دو سر گیردار تحت نیروی محوری

برای مدل‌سازی ترک، تیر به دو قسمت به طول‌های lc و $l-lc$ که با یک فنر چرخشی بدون جرم به یکدیگر متصل شده‌اند تقسیم می‌گردد. برای محاسبه نرمی ایجاد شده در تیر به علت وجود ترک، از روابط مکانیک شکست و تعریف ضریب شدت تنش برای مود اول ترک (بازشدگی) استفاده شده سختی فنر چرخشی محاسبه می‌شود. ترک به صورت لبه‌ای و باز در نظر گرفته شده است. ضریب نرمی کلی به صورت رابطه (۱) می‌باشد [۷ و ۸].

$$c = \frac{72\pi(1-\nu^2)}{E h^2 b} \int_0^{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} F^2(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} \quad (1)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{a}{h}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{h}$$

E مدول یانگ، ν ضریب پواسون، b عرض تیر و F متغیری در امتداد عمق ترک می‌باشند. تابع تصحیح بی‌بعدی است که با رابطه (۲) تعریف می‌گردد.

$$F = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi\bar{\alpha}} \tan \frac{\pi\bar{\alpha}}{2}} \left[0.923 + 0.199 \left(1 - \sin \frac{\pi\bar{\alpha}}{2} \right)^4 \right]}{\cos \left(\frac{\pi\bar{\alpha}}{2} \right)} \quad (2)$$

۲-۲- معادلات حاکم

روابط (۳) معادلات حاکم بر مسئله پس کماتش تیر را نشان می‌دهد [۹ و ۱۰].

S متغیری در امتداد محور تیر، u^j و w^j به ترتیب جابه‌جایی‌های اولیه و نهایی تیر z م در راستاهای x و y هستند. θ^j زاویه بین خط مماس بر منحنی تغییرشکل تیر و محور y و θ_0^j زاویه چرخش اولیه المانی از تیر قبل

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_d^j}{\partial S} &= -\left(1 + \frac{N_e^j}{K}\right) \theta_d^j \sin \theta_e^j + \frac{N_d^j}{K} \cos \theta_e^j \\ \frac{\partial U_d^j}{\partial S} &= \left(1 + \frac{N_e^j}{K}\right) \theta_d^j \cos \theta_e^j + \frac{N_d^j}{K} \sin \theta_e^j \\ \frac{\partial M_d^j}{\partial S} - Q_d^j &= 0, \quad j=1,2 \\ \frac{\partial \theta_d^j}{\partial S} - M_d^j &= 0 \quad (8) \\ \frac{\partial}{\partial S} \left[N_d^j \cos \theta_e^j - N_e^j \theta_d^j \sin \theta_e^j \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial S} \left[Q_d^j \sin \theta_e^j + Q_e^j \theta_d^j \cos \theta_e^j \right] = -\Omega^2 W_d^j \\ \frac{\partial}{\partial S} \left[N_d^j \sin \theta_e^j + N_e^j \theta_d^j \cos \theta_e^j \right] \\ &- \frac{\partial}{\partial S} \left[Q_d^j \cos \theta_e^j - Q_e^j \theta_d^j \sin \theta_e^j \right] = -\Omega^2 U_d^j \end{aligned}$$

در ادامه روابط استاتیکی و دینامیکی مربوط به معادلات پیوستگی، معادلات ترک و شرایط مرزی نیز مشابه روش استخراج معادلات حاکم، به دست خواهند آمد.

۲-۳- معادلات پیوستگی

باتوجه به نحوه مدل سازی ترک، روابط پیوستگی استاتیکی و دینامیکی مربوط به آن به ترتیب به صورت روابط (۹) و (۱۰) در خواهند آمد.

$$\begin{aligned} U_e^1(L_C) &= U_e^2(L_C), \quad W_e^1(L_C) = W_e^2(L_C) \\ F_{ex}^1(L_C) &= F_{ex}^2(L_C), \quad F_{ey}^1(L_C) = F_{ey}^2(L_C) \\ M_e^1(L_C) &= M_e^2(L_C), \quad L_C = \frac{l_c}{l} \quad (9) \\ F_{ex}^j &= N_e^j \sin \theta_e^j - Q_e^j \cos \theta_e^j \\ F_{ey}^j &= N_e^j \cos \theta_e^j + Q_e^j \sin \theta_e^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_d^1(L_C) &= U_d^2(L_C), \quad W_d^1(L_C) = W_d^2(L_C) \\ F_{dx}^1(L_C) &= F_{dx}^2(L_C), \quad F_{dy}^1(L_C) = F_{dy}^2(L_C) \\ M_d^1(L_C) &= M_d^2(L_C) \\ F_{dx}^j &= N_d^j \sin \theta_e^j + N_e^j \theta_d^j \cos \theta_e^j \\ &\quad - Q_d^j \cos \theta_e^j + Q_e^j \theta_d^j \sin \theta_e^j \\ F_{dy}^j &= N_d^j \cos \theta_e^j - N_e^j \theta_d^j \sin \theta_e^j \\ &\quad + Q_d^j \sin \theta_e^j + Q_e^j \theta_d^j \cos \theta_e^j \end{aligned} \quad (10)$$

در روابط (۹) و (۱۰)، معادلات اول و دوم مربوط به پیوستگی جابه جایی و معادلات سوم و چهارم مربوط به

باتوجه به آن که دامنه حرکت ارتعاشی تیر کمانه شده بسیار کوچکتر از دامنه حرکت استاتیکی می باشد، لذا می توان متغیرها را به صورت روابط (۶) تعریف نمود [۳].

$$\begin{aligned} U^j(S, T) &= U_e^j(S) + U_d^j(S) \sin \Omega T \\ W^j(S, T) &= W_e^j(S) + W_d^j(S) \sin \Omega T \\ \theta^j(S, T) &= \theta_e^j(S) + \theta_d^j(S) \sin \Omega T \end{aligned} \quad (6)$$

$$N^j(S, T) = N_e^j(S) + N_d^j(S) \sin \Omega T$$

$$Q^j(S, T) = Q_e^j(S) + Q_d^j(S) \sin \Omega T$$

$$M^j(S, T) = M_e^j(S) + M_d^j(S) \sin \Omega T$$

که اندیس e نشان دهنده حالت تعادل و اندیس d بیان گر حالت دینامیکی می باشد. باتوجه به روابط (۶) برای حل مسئله ارتعاشی تیر کمانه شده نیاز است که یک بار معادلات (۵) به صورت استاتیکی حل گشته تا مقادیر مربوط به حالت تعادل به دست آیند. با حذف جمله های زمانی از معادلات (۵) معادلات تعادل به صورت رابطه (۷) به دست می آیند.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_e^j}{\partial S} &= \left(1 + \frac{N_e^j}{K}\right) \cos \theta_e^j - \cos \theta_e^j \\ \frac{\partial U_e^j}{\partial S} &= \left(1 + \frac{N_e^j}{K}\right) \sin \theta_e^j - \sin \theta_e^j \\ \frac{\partial M_e^j}{\partial S} - Q_e^j &= 0, \quad j=1,2 \quad (7) \\ \frac{\partial \theta_e^j}{\partial S} + \frac{\partial \theta_0^j}{\partial S} - M_e^j &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial S} (N_e^j \cos \theta_e^j) + \frac{\partial}{\partial S} (Q_e^j \sin \theta_e^j) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial S} (N_e^j \sin \theta_e^j) - \frac{\partial}{\partial S} (Q_e^j \cos \theta_e^j) &= 0 \end{aligned}$$

با به دست آمدن معادلات حالت استاتیکی، جای گذاری روابط (۶) در روابط (۵)، بسط روابط به دست آمده، استفاده از فرضیات ساده کننده و با حذف ترم های غیرخطی، معادلات حاکم بر مسئله ارتعاشات آزاد تیر کمانه شده به دست می آیند.

۳- حل معادلات استاتیکی

برای گسسته‌سازی معادلات از روش کوادراتور دیفرانسیلی استفاده می‌گردد.

۳-۱- روش کوادراتور دیفرانسیلی

در روش کوادراتور دیفرانسیلی مشتق مرتبه اول تابع $\psi(x)$ در یک نقطه درون دامنه آن به صورت تقریبی خطی از مجموع مقادیر وزنی تابع در تمام دامنه نوشته می‌شود [۱۱].

$$\frac{d\psi}{dx}\Big|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} \psi(x_k) \quad i=1,2,\dots,n_p \quad (15)$$

در رابطه (۱۵) تعداد نقاط دقت، x_i نقطه‌ی دقت i ام از دامنه تابع و C_{ik} ضرایب وزنی برای به دست آوردن مشتق مرتبه اول تابع در نقطه دقت i ام می‌باشند. برای محاسبه ضرایب وزنی روش کوادراتور دیفرانسیلی کوان و چانگ [۱۲]، از رابطه جبری زیر استفاده نمودند که مستقل از مختصات نقاط دقت می‌باشد.

$$C_{ik} = \frac{1}{(x_i - x_k)} \prod_{\substack{j=1, \dots, n_p \\ j \neq i, k \\ i \neq k}} \frac{(x_i - x_j)}{(x_k - x_j)} \quad (16)$$

$$C_{ii} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_p} C_{ik} \quad , \quad i, k = 1, 2, 3, \dots, n_p$$

انواع نقاط دقتی که در این پژوهش استفاده شده عبارتند از [۱۳]:

۱- نقاط دقت با استفاده از ریشه‌های چند جمله‌ای چیشف:

$$x_i = \phi_0 + \frac{(\phi_1 - \phi_0)}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2i-1}{2n_p} \pi\right) \right] \quad (17)$$

$$x_1 = \phi_0, x_{n_p} = \phi_1 \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n_p - 1$$

۲- نقاط دقت با استفاده از ریشه‌های چند جمله‌ای لژاندر:

$$x_i = \phi_0 + \frac{(\phi_1 - \phi_0)}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2i-3}{2n_p-4} \pi\right) \right] \quad (18)$$

$$x_1 = \phi_0, x_{n_p} = \phi_1 \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n_p - 1$$

پیوستگی نیرویی در راستاهای x و y هستند. معادله پنجم پیوستگی ممان خمشی را بیان می‌نماید.

۲-۴- معادلات ترک

باتوجه به نحوه مدل‌سازی ترک، روابط ناپیوستگی استاتیکی و دینامیکی مربوط به آن به ترتیب به صورت روابط (۱۱) و (۱۲) در خواهند آمد.

$$\theta_e^2(L_C) = \theta_e^1(L_C) + \frac{EI}{l} c M_e^1(L_C) \quad (11)$$

$$\theta_d^2(L_C) = \theta_d^1(L_C) + \frac{EI}{l} c M_d^1(L_C) \quad (12)$$

۲-۵- شرایط مرزی

شرایط مرزی استاتیکی تیر دو سرگیردار تحت نیروی محوری P به صورت روابط (۱۳) می‌باشد.

$$\begin{aligned} W_e^1(0) = 0, \quad U_e^1(0) = 0, \quad \theta_e^1(0) = \frac{\pi}{2}, \\ W_e^2(1) = 0, \quad \theta_e^2(1) = \frac{\pi}{2}, \quad N_e^2(1) = P. \end{aligned} \quad (13)$$

رابطه (۱۳) بیان‌گر آن است که ابتدا و انتهای تیر اجازه حرکت در راستای محور y را نداشته و زوایای آن‌ها برابر با $\frac{\pi}{2}$ است (θ نسبت به محور y محاسبه می‌گردد).

همچنین ابتدای تیر ($S=0$) اجازه حرکت در راستای محور x را ندارد. انتهای تیر ($S=1$) اجازه حرکت در راستای محور x را دارا بوده و نیروی محوری وارد بر آن برابر با P می‌باشد. شرایط مرزی دینامیکی به صورت روابط (۱۴) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} W_d^1(0) = 0, \quad U_d^1(0) = 0, \quad \theta_d^1(0) = 0, \\ W_d^2(1) = 0, \quad U_d^2(1) = 0, \quad \theta_d^2(1) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

رابطه (۱۴) مشابه رابطه (۱۳) می‌باشد، با این تفاوت که در این رابطه انتهای تیر نیز اجازه حرکت در راستای محور x را ندارد.

۴- حل معادلات دینامیکی

برای به دست آوردن پاسخ ارتعاشی تیر نیز همانند حل استاتیکی مسئله، از روش کوادراتور دیفرانسیلی استفاده می‌گردد. با استفاده از روش کوادراتور دیفرانسیلی روابط (۸) گسسته شده و به صورت روابط (۲۲) در خواهند آمد. مشابه حل استاتیکی برای آنکه در حل معادلات دینامیکی تناقض ریاضی بوجود نیامده و تعداد معادلات با تعداد مجهولات برابر باشد، برای معادلات اول، پنجم و ششم روابط (۲۲) $2 \leq i \leq n_p - 1$ و برای سایر معادلات $1 \leq i \leq n_p$ می‌باشد. در واقع در حل ارتعاشی مسئله معادلات اول، پنجم و ششم روابط (۲۲)، فقط برای نقاط داخلی نوشته می‌شوند و باقی معادلات برای تمامی نقاط دقت نوشته می‌شوند.

$$\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} W_{dk}^j = - \left(1 + \frac{N_{ei}^j}{K} \right) \theta_{di}^j \sin \theta_{ei}^j + \frac{N_{di}^j}{K} \cos \theta_{ei}^j$$

$$\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} U_{dk}^j = \left(1 + \frac{N_{ei}^j}{K} \right) \theta_{di}^j \cos \theta_{ei}^j + \frac{N_{di}^j}{K} \sin \theta_{ei}^j$$

$$\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} M_{dk}^j - Q_{di}^j = 0, \quad j = 1, 2$$

$$\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} \theta_{dk}^j - M_{di}^j = 0 \tag{22}$$

$$\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} \left(N_{dk}^j \cos \theta_{ek}^j - N_{ek}^j \theta_{dk}^j \sin \theta_{ek}^j + Q_{dk}^j \sin \theta_{ek}^j + Q_{ek}^j \theta_{dk}^j \cos \theta_{ek}^j \right) = -\Omega^2 W_{di}^j$$

$$\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} \left(N_{dk}^j \sin \theta_{ek}^j + N_{ek}^j \theta_{dk}^j \cos \theta_{ek}^j - Q_{dk}^j \cos \theta_{ek}^j + Q_{ek}^j \theta_{dk}^j \sin \theta_{ek}^j \right) = -\Omega^2 U_{di}^j$$

پس از گسسته سازی معادلات دینامیکی حاکم، مقادیر به دست آمده از حالت تعادل در معادلات گسسته شده دینامیکی جای گذاری می‌گردند. معادلات حاکم دینامیکی گسسته شده به همراه شرایط مرزی، معادلات پیوستگی و

۳- نقاط دقت با استفاده از ریشه های چند جمله ای های گوس-لوباتو-چیبیشف:

$$x_i = \phi_0 + \frac{(\phi_1 - \phi_0)}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{n_p-1} \pi \right) \right] \tag{19}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n_p$$

در رابطه (۱۹) ϕ_0 و ϕ_1 به ترتیب ابتدا و انتهای بازه ای است که باید با استفاده از نقاط دقت گسسته شود. این مقادیر با استفاده از رابطه (۲۰) تعیین می‌شوند.

$$\phi_0 = 0, \quad \phi_1 = L_C \quad j = 1$$

$$\phi_0 = L_C, \quad \phi_1 = 1 \quad j = 2 \tag{20}$$

با استفاده از روش کوادراتور دیفرانسیلی می‌توان معادلات (۷) را به صورت روابط (۲۱) بیان نمود.

$$\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} W_{ek}^j = \left(1 + \frac{N_{ei}^j}{K} \right) \cos \theta_{ei}^j - \cos \theta_{0i}^j$$

$$\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} U_{ek}^j = \left(1 + \frac{N_{ei}^j}{K} \right) \sin \theta_{ei}^j - \sin \theta_{0i}^j$$

$$\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} M_{ek}^j - Q_{ei}^j = 0, \quad \begin{cases} j = 1, 2 \\ i = 1, 2, 3, \dots, n_p - 1 \end{cases} \tag{21}$$

$$\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} \theta_{ek}^j + \left(\frac{\partial \theta_{0i}^j}{\partial S} \right)_i - M_{ei}^j = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} N_{ek}^j \cos \theta_{ek}^j + \sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} Q_{ek}^j \sin \theta_{ek}^j = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} N_{ek}^j \sin \theta_{ek}^j - \sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} Q_{ek}^j \cos \theta_{ek}^j = 0$$

با فرض آن که هر تیر با n_p نقطه دقت گسسته گردد، تعداد تمامی مجهولات برابر با $12n_p$ می‌باشد. با توجه به ۶ شرط مرزی، ۵ معادله پیوستگی و معادله ترک، تعداد تمامی معادلات حاکمی که باید نوشته شود تا تناقض ریاضی بوجود نیامده و تعداد مجهولات مسئله با تعداد معادلات برابر شوند $12n_p - 12$ می‌باشد. بنابراین باید برای یکی از نقاط مرزی هر یک از تیرها نیز، معادله حاکم نوشته شود. پس از گسسته سازی معادلات با استفاده از روش کوادراتور دیفرانسیلی، این معادلات با استفاده از روش طول قوس حل می‌گردند [۱۴ و ۱۵].

قبل از تغییر شکل بزرگ تیر، فرض خطی بودن روابط صادق است از معادلات (۲۶) و (۲۷) استفاده شده است.

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\partial \bar{W}}{\partial s} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial s} = -\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial s^2} \quad (27)$$

۵-۱- بررسی دقت فرکانس‌های طبیعی تیر کمانه‌شده ترک‌دار

برای اطمینان از درستی فرکانس‌های طبیعی تیر کمانه‌شده ترک‌دار به دست آمده از روش عددی پژوهش حاضر، چهار فرکانس طبیعی اول با نتایج حاصل از نرم‌افزار اجزاء محدود ANSYS مقایسه می‌شوند. برای مقایسه از تیری با مشخصات مکانیکی جدول ۱ استفاده شده است.

جدول ۱- ابعاد و مشخصات مکانیکی تیر

طول (mm)	عرض (mm)	ضخامت (mm)	چگالی (Kg/m ³)	مدول یانگ (GPa)	ضریب پواسون
۱۰۰۰	۲۵	۱۰	۷۸۰۰	۲۰۰	۰/۳

ترک به عمق بی‌بعد ۰/۲۵ در وسط تیر در نظر گرفته شده است. دامنه نقص هندسی نیز ۰/۰۰۱ می‌باشد. برای مدل‌سازی تیر ترک‌دار در نرم‌افزار ANSYS از ۵۰۰ المان BEAM189 استفاده شده است. همچنین، ترک به صورت کاهش ارتفاع تیر در محل ترک، مدل شده است. جدول ۲ نتایج این مقایسه را برای مقادیر متفاوت ضرایب بار بحرانی نشان می‌دهد. با توجه به این جدول مشاهده می‌گردد که نتایج پژوهش حاضر نسبت به نتایج ANSYS دارای دقت قابل قبولی می‌باشند.

معادله ترک یک دستگاه معادلات با مقادیر ویژه به صورت رابطه (۲۳) را تشکیل می‌دهند که یک مسئله مقدار ویژه غیراستاندارد می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = -\Omega^2 \begin{bmatrix} O & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

در این رابطه O ماتریس صفر و I ماتریس واحد می‌باشند. بردار X_1 شامل مقادیر جابه‌جایی‌های نقاط دقت مرزی هر تیر در راستاهای x و y و همچنین مقادیر زوایای چرخش، نیروهای محوری و برشی و ممان خمشی تمامی نقاط دقت می‌باشد. بردار جابه‌جایی X_2 شامل مقادیر جابه‌جایی‌های نقاط دقت داخلی هر تیر در راستاهای x و y می‌باشد. ماتریس‌های A_{11} و A_{12} شامل ضرایب معادلات اول تا چهارم روابط (۲۲)، معادلات پیوستگی، معادله ترک و معادلات شرایط مرزی و ماتریس‌های A_{21} و A_{22} شامل ضرایب معادلات پنجم و ششم روابط (۲۲) می‌شوند. در ادامه مسئله مقدار ویژه استاندارد را می‌توان به صورت رابطه (۲۴) به دست آورد.

$$\left[A_{22} - A_{21} \times A_{11}^{-1} \times A_{12} \right] X_2 = -\Omega^2 X_2 \quad (24)$$

که با حل این رابطه، فرکانس‌های بی‌بعد تیر کمانه‌شده ترک‌دار و شکل مودهای متناظر آن‌ها به دست خواهند آمد.

۵- نتایج

در این پژوهش فرض شده است که تیر دارای مقداری نقص هندسی می‌باشد. مقدار نقص هندسی به صورت ضریبی از شکل مود کمانشی تیر در نظر گرفته شده است. برای اعمال نقص هندسی در مسئله از رابطه (۲۵) استفاده شده است [۱۶].

$$\bar{W} = \frac{1}{2} W_0 (1 - \cos(2\pi s/l)) \quad (25)$$

که در آن W_0 دامنه نقص هندسی است. برای وارد نمودن نقص هندسی در معادلات استاتیکی و با توجه به این‌که

۵-۲- تاثیر نقاط دقت گوناگون بر همگرایی فرکانس های طبیعی

می دهند. ترک در وسط تیر و با عمق نسبی ۰/۲۵ در نظر گرفته شده است. تیر تحت بار ۱/۲ برابر بار بحرانی تیر سالم می باشد. همان طور که در این شکل ها مشاهده می شود، همگرایی نقاط دقت گوس- لوباتو- چبیشف از سایر نقاط دقت دیگر بهتر است.

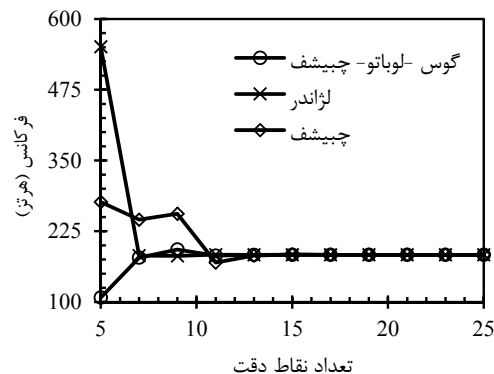
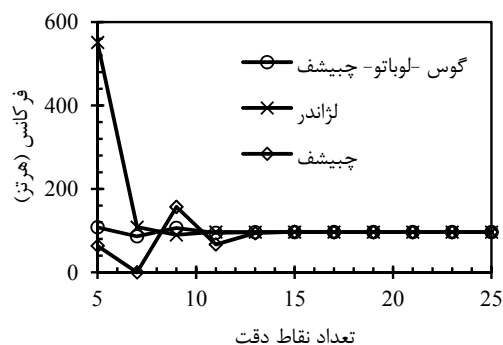
تعداد و نوع نقاط دقت بر همگرایی فرکانس های طبیعی تیر کمانه شده ترک دار تاثیر می گذارد. شکل های ۲ و ۳ تاثیر نقاط دقت چبیشف، لژاندر و گوس- لوباتو- چبیشف را بر همگرایی فرکانس های طبیعی اول و دوم نشان

جدول ۲- فرکانس های طبیعی تیر کمانه شده ترک دار

۱/۶	۱/۴	۱/۲	ضریب بار بحرانی		
۲۰۰/۲۴۵	۱۹۳/۸۷۹	۱۸۳/۳۷۴	پژوهش حاضر	فرکانس اول (هرتز)	
۲۰۰/۶۸۰	۱۹۳/۸۴۰	۱۸۳/۳۲۰	ANSYS		
۰/۲۱۶	۰/۰۲۰	۰/۰۲۹	درصد خطای نسبی		
۶۳/۷۵۹	۸۱/۹۰۴	۹۶/۴۲۴	پژوهش حاضر	فرکانس دوم (هرتز)	
۶۴/۵۹۹	۸۲/۱۶۴	۹۶/۳۴۰	ANSYS		
۱/۳۰۰	۰/۳۱۶	۰/۱۹۱	درصد خطای نسبی		
۳۴۸/۱۱۶	۳۸۶/۸۹۴	۴۵۰/۱۱۳	پژوهش حاضر	فرکانس سوم (هرتز)	
۳۴۸/۵۸۰	۳۸۷/۷۴۰	۴۵۱/۷۸۰	ANSYS		
۰/۱۳۳	۰/۳۱۸	۰/۳۶۸	درصد خطای نسبی		
۲۰۳/۵۶۶	۲۱۴/۷۶۰	۲۵۷/۳۱۵	پژوهش حاضر	فرکانس چهارم (هرتز)	
۲۰۳/۳۳۰	۲۱۵/۸۷۰	۲۵۹/۴۸۰	ANSYS		
۰/۱۱۶	۰/۵۱۴	۰/۸۳۴	درصد خطای نسبی		

در ادامه تاثیر تعداد نقاط دقت بر همگرایی فرکانس های طبیعی تیر کمانه شده برای مکان های نسبی متفاوت ترک بررسی می شود. شکل های ۴ و ۵ تاثیر تعداد نقاط دقت را بر همگرایی فرکانس های طبیعی اول و دوم تیر کمانه شده ترک دار نشان می دهند. عمق نسبی ترک ۰/۵ می باشد. تیر تحت بار ۱/۲ برابر بار بحرانی تیر سالم می باشد.

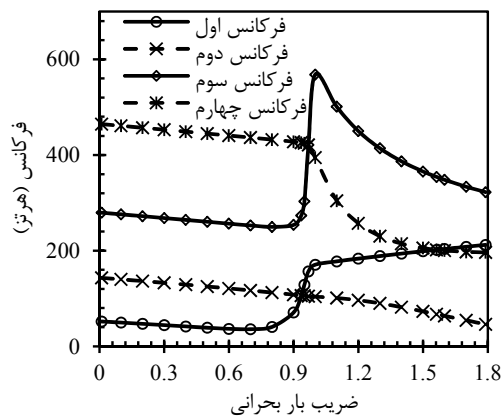
این نتایج برای فرکانس های طبیعی سوم و چهارم نیز به دست آمده اند. بنابراین در ادامه از این نقاط دقت استفاده می گردد.



شکل ۳- تاثیر نقاط دقت در همگرایی فرکانس طبیعی دوم

شکل ۲- تاثیر نقاط دقت در همگرایی فرکانس طبیعی اول

فرکانس‌های طبیعی به دلیل کاهش استحکام سازه با افزایش بار کاهش می‌یابند. پس از کمانش و با ایجاد تغییرشکل بزرگ در تیر، فرکانس‌های متناظر با شکل مودهای فرد افزایش یافته و فرکانس‌های متناظر با شکل مودهای زوج کاهش می‌یابند. بعد از وقوع تغییرشکل بزرگ با افزایش بار به دلیل افزوده شدن انرژی پتانسیل تیر و ناپایدار شدن آن، فرکانس‌های طبیعی دوم تا چهارم کاهش یافته و فرکانس اول که به میزان خمیدگی تیر حساس می‌باشد با اضافه شدن بار (افزایش خمیدگی) افزایش می‌یابد. همچنین در بارهای ۰/۹۳۵۶، ۰/۹۶۸۷ و ۱/۵۶۳۰ برابر بار بحرانی تیر سالم به ترتیب بین فرکانس‌های طبیعی اول و دوم، سوم و چهارم و اول و چهارم تشدید اتفاق می‌افتد.

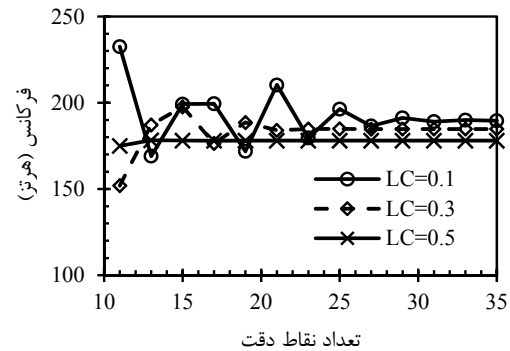


شکل ۶- تغییرات چهار فرکانس طبیعی اول با افزایش بار

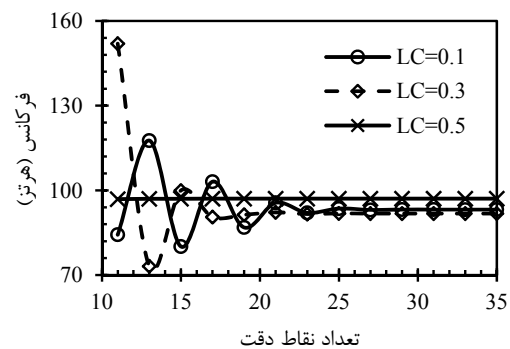
۵-۴- تغییرات فرکانس طبیعی در اثر تغییر مکان و عمق نسبی ترک

در این بخش تاثیر تغییر مکان و عمق نسبی ترک بر چهار فرکانس طبیعی اول تیر کمانه شده ترک‌دار بررسی می‌گردد. در شکل ۷ تغییرات فرکانس طبیعی اول تیر کمانه شده با تغییرات مکان نسبی ترک برای عمق‌های نسبی متفاوت بررسی شده است.

از شکل ۴ مشخص است که فرکانس اول برای مکان‌های نسبی ترک $L_C = 0.1$ ، $L_C = 0.3$ و $L_C = 0.5$ به ترتیب بعد از ۳۱، ۲۱ و ۱۵ نقطه دقت همگرا شده است. با توجه به شکل ۵ فرکانس طبیعی دوم برای همین مکان‌های نسبی ترک به ترتیب با ۲۵، ۲۱ و ۱۱ نقطه دقت همگرا شده است. مشابه این نتایج برای فرکانس‌های طبیعی سوم و چهارم نیز به دست آمده‌اند. بنابراین در این پژوهش از ۳۱ نقطه دقت استفاده می‌گردد. با توجه به این شکل‌ها مشخص است که هر چه محل ترک به وسط تیر نزدیک‌تر می‌شود همگرایی مسئله با تعداد نقاط کمتری به دست می‌آید.



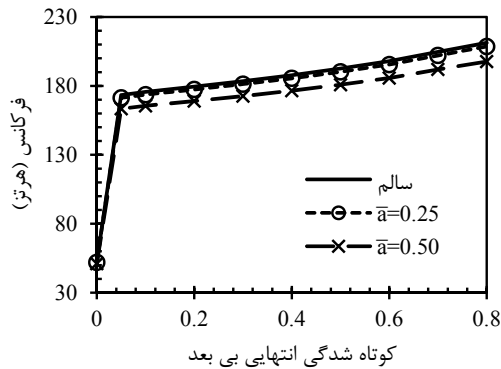
شکل ۴- تاثیر تعداد نقاط دقت در همگرایی فرکانس اول



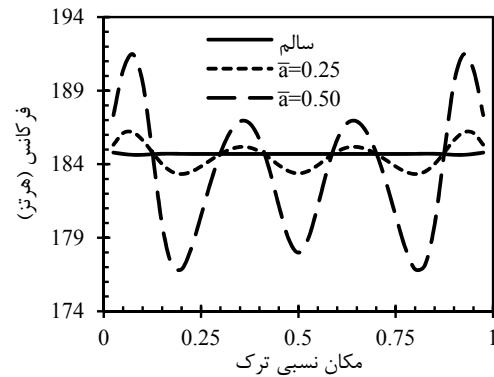
شکل ۵- تاثیر تعداد نقاط دقت در همگرایی فرکانس دوم

۵-۳- تغییرات فرکانس‌های طبیعی با افزایش بار

شکل ۶ تغییرات چهار فرکانس طبیعی اول تیر ترک‌دار را با افزایش بار نشان می‌دهد. ترک در وسط و عمق نسبی آن ۰/۲۵ در نظر گرفته شده است. با توجه به شکل مشخص است که قبل از ایجاد تغییرشکل بزرگ در تیر،

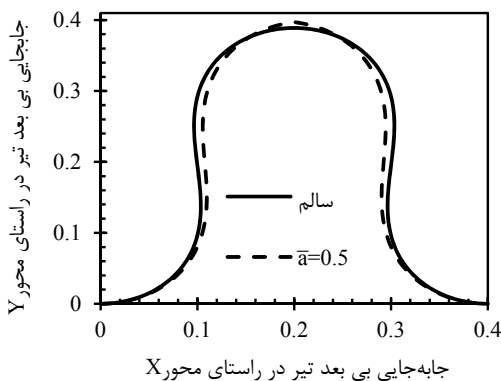


شکل ۸- تغییرات فرکانس اول بر حسب کوتاه شدگی انتهایی



شکل ۷- تغییرات فرکانس اول بر حسب مکان نسبی

شکل ۹ پس کمانش تیر دو سر گیردار سالم و ترک دار را نشان می‌دهد که ترک در وسط آن می‌باشد.

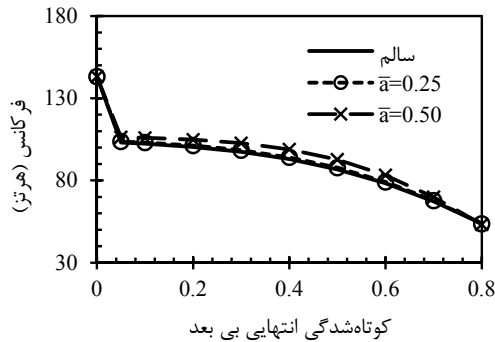


شکل ۹- پس کمانش تیر دوسر گیردار سالم و ترک دار

همان‌طور که مشاهده می‌شود برای دو تیر با کوتاه شدگی انتهایی یکسان، خمیدگی تیر ترک دار بیشتر است که این امر سبب افزایش فرکانس طبیعی اول تیر می‌گردد (شکل ۶). اما همان‌طور که در شکل ۸ مشخص است این افزایش فرکانس قادر به جبران کاهش فرکانس طبیعی به دلیل وجود ترک در تیر نمی‌باشد. به بیان دیگر در اینجا اثر ترک نسبت به خمیدگی تیر بیشتر است و به همین دلیل مقدار فرکانس طبیعی اول تیر ترک دار نسبت به فرکانس اول تیر سالم کاهش می‌یابد.

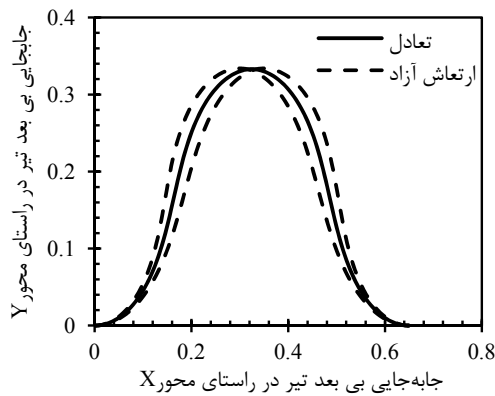
حالت تعادل و ارتعاش آزاد مربوط به شکل مود اول تیر کمانه شده با ترکی در وسط و به عمق 0.25 در شکل ۱۰ نشان داده شده است.

تیر تحت بار $1/2$ برابر بار بحرانی تیر سالم می‌باشد. همان‌گونه که از شکل مشخص است با افزایش عمق ترک میزان سختی تیر کاهش بیشتری یافته و فرکانس طبیعی کم می‌شود. به دلیل تغییرات گشتاور خمشی تیر بین مقدار بیشینه خود در دو انتها و وسط تیر اثر ترک در محل‌های مختلف متفاوت است. از آنجا که نیروی محوری وارد بر تیر ثابت می‌باشد، با افزایش عمق نسبی ترک سختی آن کاهش یافته، بر کوتاه شدگی انتهایی آن افزوده شده و بیشتر خمیده می‌شود. بنابراین، با قرار گرفتن محل ترک در نقاطی از تیر، فرکانس‌های طبیعی تیر کمانه شده ترک دار نسبت به حالت سالم آن افزایش می‌یابد. این اثر در شکل ۸ بررسی شده است. در این شکل تغییرات فرکانس طبیعی اول بر حسب تغییرات کوتاه شدگی انتهایی بی بعد برای عمق‌های متفاوت ترک رسم شده است. با توجه به شکل مشخص است که برای یک کوتاه شدگی مشخص، با افزایش عمق ترک مقدار فرکانس طبیعی تیر ترک دار نسبت به فرکانس طبیعی تیر سالم کاهش می‌یابد. دلیل این امر کاهش استحکام سازه به دلیل افزایش نرمی تیر به خاطر وجود ترک است. علاوه بر این، همان‌گونه که از شکل دیده می‌شود افزایش کوتاه شدگی انتهایی تیر سبب ازدیاد فرکانس طبیعی می‌گردد.



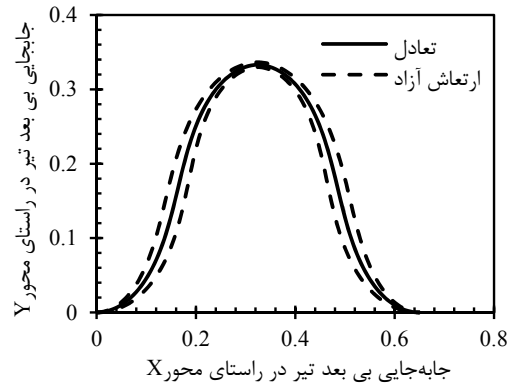
شکل ۱۲- تغییرات فرکانس دوم برحسب کوتاه‌شدگی انتهای بی

شکل ۱۳ حالت تعادل و ارتعاش آزاد مربوط به فرکانس طبیعی دوم تیر کمانه‌شده با ترکی در وسط و به عمق 0.25 را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشخص است که شکل مود دوم، یک گره دارد.



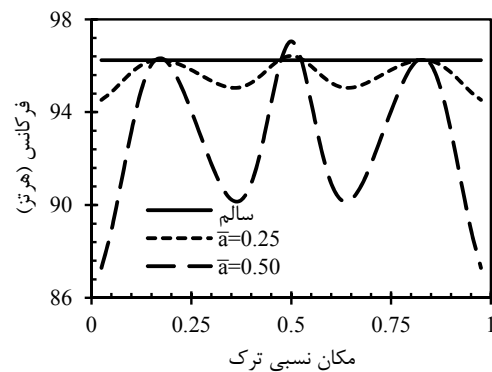
شکل ۱۳- حالت تعادل و ارتعاش آزاد در فرکانس طبیعی دوم

شکل ۱۴ تغییرات فرکانس سوم تیر کمانه‌شده ترک‌دار را برحسب تغییرات مکان نسبی ترک نشان می‌دهند. حالت تعادل و ارتعاش آزاد مربوط به فرکانس سوم طبیعی تیر کمانه‌شده با ترکی در وسط و به عمق 0.25 در شکل ۱۵ نشان داده شده است. همان‌گونه که دیده می‌شود، شکل مود سوم دارای چهار گره است.



شکل ۱۰- حالت تعادل و ارتعاش آزاد برای فرکانس طبیعی اول

شکل ۱۱ تغییرات فرکانس دوم تیر کمانه‌شده ترک‌دار را برحسب تغییرات مکان نسبی ترک نشان می‌دهد.

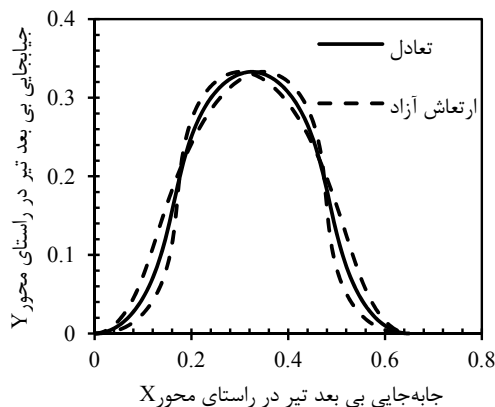


شکل ۱۱- تغییرات فرکانس دوم برحسب مکان نسبی

تغییرات فرکانس طبیعی دوم تیر کمانه‌شده با افزایش کوتاه‌شدگی انتهای بی در شکل ۱۲ نشان داده شده است. با توجه به شکل مشخص است که برای یک کوتاه‌شدگی مشخص، فرکانس طبیعی تیر ترک‌دار نسبت به فرکانس طبیعی تیر سالم افزایش می‌یابد که این امر بدان خاطر است که بار وارده بر تیر ترک‌دار کمتر از بار وارده بر تیر سالم بوده و در نتیجه تیر ترک‌دار نسبت به تیر سالم پایدارتر می‌گردد (شکل ۶). اما مشاهده می‌گردد که با افزایش کوتاه‌شدگی، اثر ترک غالب گشته و مقدار فرکانس طبیعی دوم تیر ترک‌دار نزدیک به مقدار فرکانس طبیعی تیر سالم می‌گردد.

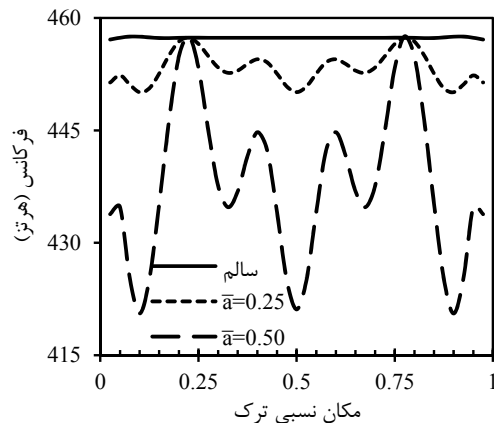
شکل ۱۷ حالت تعادل و ارتعاش آزاد مربوط به فرکانس طبیعی چهارم تیر کمانه شده با ترکی در وسط و به عمق 0.25 را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۱۷ مشخص است که شکل مود چهارم، سه گره دارد. در ادامه تغییرات فرکانس‌های طبیعی تیر کمانه شده ترک دار برحسب تغییرات عمق نسبی برای مکان‌های نسبی متفاوت ترک بررسی می‌شوند.

شکل ۱۸ این تغییرات را برای چهار فرکانس اول تیر، در حالتی که تحت بار $1/2$ برابر بار بحرانی تیر سالم می‌باشد، نشان می‌دهد.

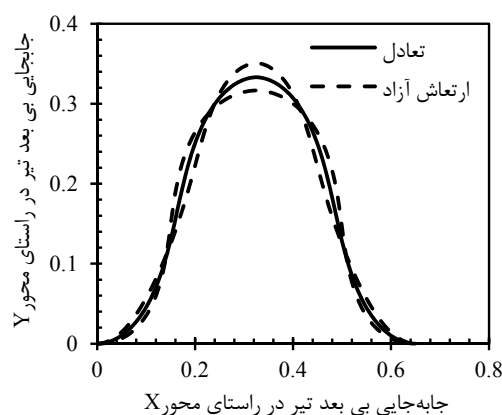


شکل ۱۷- حالت تعادل و ارتعاش آزاد در فرکانس طبیعی چهارم

از شکل ۱۸- الف دیده می‌شود که به دلیل وجود تقارن، منحنی مربوط به مکان‌های ترک $L_C = 0.4$ و $L_C = 0.6$ بر یکدیگر منطبق هستند. همچنین مشاهده می‌گردد که فرکانس طبیعی با افزوده شدن عمق ترک برای مکان‌های ترک $L_C = 0.1$ ، $L_C = 0.4$ و $L_C = 0.6$ افزایش و برای مکان‌های $L_C = 0.2$ و $L_C = 0.5$ کاهش می‌یابد. برای مکان نسبی ترک $L_C = 0.3$ افزایش عمق نسبی آن بر تغییرات فرکانس طبیعی تقریباً بی‌اثر می‌باشد. مشابه این تغییرات را می‌توان برای سه فرکانس دیگر در شکل‌های ۱۸- ب، ۱۸- ج و ۱۸- د مشاهده نمود.

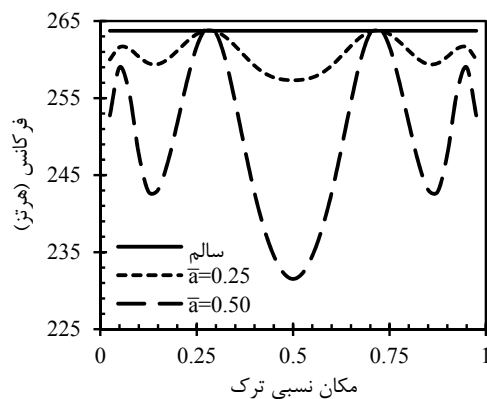


شکل ۱۴- تغییرات فرکانس سوم برحسب مکان نسبی



شکل ۱۵- حالت تعادل و ارتعاش آزاد در فرکانس طبیعی سوم

شکل ۱۶ تغییرات فرکانس چهارم تیر کمانه شده ترک دار را برحسب تغییرات مکان نسبی ترک نشان می‌دهد.



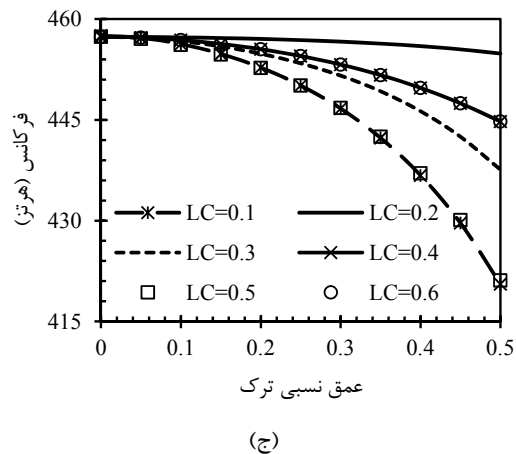
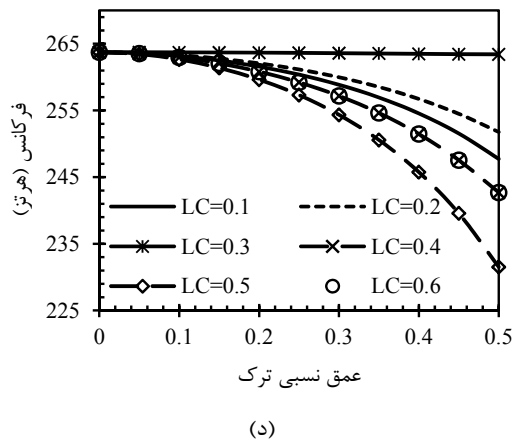
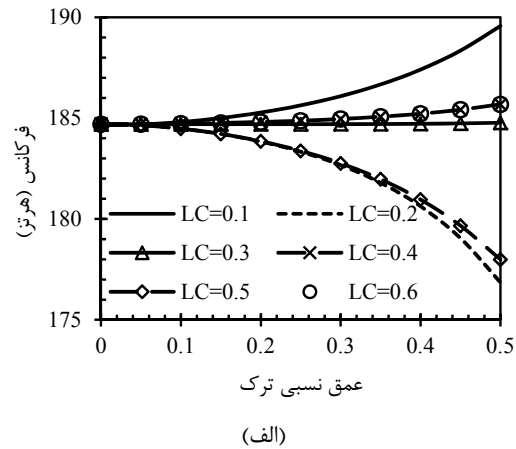
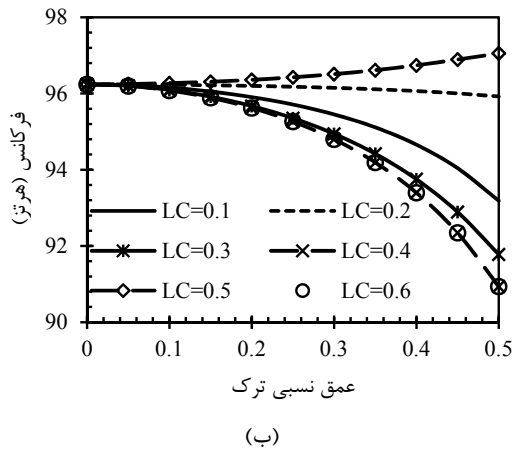
شکل ۱۶- تغییرات فرکانس چهارم برحسب مکان نسبی

۶- نتیجه گیری

ارتعاشات آزاد تیر کمانه شده ترک دار بررسی گردید. برای مدل سازی ترک از فنر خطی بدون جرم استفاده و ترک به صورت باز و لبه ای در نظر گرفته شد. به منظور بررسی ارتعاشات آزاد تیر کمانه شده، تیر به دو قسمت تقسیم شده و از معادلات دیفرانسیل در مختصات مماسی استفاده گردید. با توجه به کوچک بودن دامنه حرکت ارتعاشات آزاد تیر نسبت به دامنه حرکت استاتیکی، معادلات ارتعاشی خطی شدند. برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی استاتیکی، این معادلات با روش کوادراتور دیفرانسیلی گسسته شده، سپس دستگاه معادلات جبری غیرخطی با استفاده از روش طول قوس حل شد. برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل ارتعاشی خطی شده، معادلات

با روش کوادراتور دیفرانسیلی گسسته شده و سپس مقادیر به دست آمده از حل معادلات استاتیکی در دستگاه معادلات گسسته شده دینامیکی جای گذاری شد. با حل مسئله مقدار ویژه به دست آمده فرکانس های تیر کمانه شده ترک دار و شکل مودهای متناظر با آن به دست آمدند. مقایسه نتایج به دست آمده با نتایج روش اجزا محدود نشان دهنده دقت بسیار خوب روش ارائه شده می باشد. از دیگر مزایای روش ارائه شده همگرایی با تعداد نقاط کم و زمان محاسباتی کم می باشد.

همچنین، اثر افزایش بار و افزایش عمق نسبی ترک و تغییر محل آن بر فرکانس های طبیعی بررسی گشته و مشاهده گردید که در پس کمانش بین فرکانس های طبیعی سیستم پدیده تشدید اتفاق می افتد.



شکل ۱۸- تغییرات فرکانس های طبیعی تیر ترک دار بر حسب عمق نسبی. الف) فرکانس اول، ب) فرکانس دوم، ج) فرکانس سوم، د) فرکانس چهارم

۷- مراجع

- [1] Nayfeh, A.H., Kreider, W., Anderson, T.J. (1995). "Investigation of natural frequencies and mode shapes of buckled beams". *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 6, pp. 1121-1126.
- [2] Addessi, D., Lacarbonara, W., Paolone, A. (2005). "Free in-plane vibrations of highly buckled beams carrying a lumped mass". *J. of acta mechanica*, Vol. 180, pp. 133-156.
- [3] Santillan, S.T., Virgin, L.N., Plaut, R.H. (2006). "Post-buckling and vibration of heavy Beam on horizontal or inclined rigid foundation". *J. of applied mechanics*, Vol. 73, pp. 664-671.
- [4] Neukirch, S., Frelat, J., Goriely, A., Maurini, C. (2012). "Vibrations of post-buckled rods: The singular inextensible limit". *J. of Sound and Vibrations*, Vol. 331, pp. 704-720.
- [5] Silva, J.M., Gomes, A.J. (1988). "Experimental dynamic analysis of cracked free-free beams". *J. of Experimental Mechanics*, Vol. 30, No. 1, pp. 20-25.
- [6] Yang, J., Chen, Y., Sabuncu, M. (2008). "Free vibration and buckling analyses of functionally graded beams with edge cracks". *J. of Composite Structures*, Vol. 83, pp. 48-60.
- [7] Karaagac, C., Ozturk, H., Sabuncu, M. (2009). "Free vibration and lateral buckling of a cantilever slender beam with an edge crack: experimental and numerical studies". *J. of Sound and Vibration*, Vol. 326, pp. 235-250.
- [8] Saavedra, P.N., Cuitino, L.A. (2001). "Crack detection and vibration behavior of cracked beams". *J. of Computers and Structures*, Vol. 79, pp. 1451-1459.
- [9] Reissner, E. (1972). "On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem". *J. of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 23, pp. 795-804.
- [10] Hua, Y.J., Zhu, Y.Y., Cheng, C.J. (2008). "DQEM for large deformation analysis of structures with discontinuity conditions and initial displacements". *J. of Engineering Structures*, Vol. 30, pp. 1473-1487.
- [11] Shu, C. (2000). "Differential quadrature and its application in engineering". 1st edition, Verlage London, Springer.
- [12] Quan, J.R., Chang, C.T. (1989). "New insights in solving distributed system of equations by quadrature-method". *J. of Compute Chem. Engng.*, Vol. 13, pp.1017-1024.
- [13] Tornabene, F., Viola, E. (2008). "2-D solution for free vibrations of parabolic shells using generalized differential quadrature method". *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 27, pp. 1001-1025.
- [14] Forde, B.W.R., Stieme, S.F. (1987). "Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis". *J. Of Computers & Structures*, Vol. 27, No. 5, pp. 625-630.
- [15] Al-rasby, S.N. (1991). "Solution techniques in nonlinear structural analysis". *J. of Computers & Structures*, Vol. 40, No. 4, pp. 985-993.
- [16] Moradi, S., Taheri, F. (1999). "Postbuckling analysis of delaminated composite beams by differential quadrature method". *J. of Composite Structures*, Vol. 46, pp. 33-39.