

کاربرد آزمون مودال در بهبود مدل‌های عددی سازه‌ها

احسان جمشیدی^{۱*}، محمد رضا آشوری^۲، حمید دائیان^۳

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد- طراحی کاربردی، گروه مکانیک، پردیس فنی، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

۲- استادیار گروه مکانیک، پردیس فنی، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد- طراحی کاربردی، گروه مکانیک، پردیس فنی، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

ehsan.jamshidi@gmail.com

(دریافت مقاله: اردیبهشت ۱۳۸۷، پذیرش مقاله: شهریور ۱۳۸۷)

چکیده

امروزه به دلیل پیچیده شدن طراحی‌ها، بررسی رفتار سازه‌های دینامیکی به کمک اجزاء محدود بسیار مورد توجه قرار گرفته است و با ظهور کامپیوترهای قدرتمند استفاده از این روش‌ها توسط طراحان با شتاب بیشتری صورت می‌گیرد. روش دیگر دستیابی به یک مدل دینامیکی برای سازه‌های مکانیکی، ساختن مدل آزمایشگاهی برای سازه با انجام آزمون‌های ارتعاشی و تحلیل داده‌های اندازه‌گیری شده می‌باشد. به این فرایند در اصطلاح آزمون مودال می‌گویند که در طی سه دهه گذشته در تئوری و عمل توسعه بسیاری یافته است. یکی از مهم‌ترین کاربردهای آزمون مودال، بهبود مدل‌های عددی سیستم‌های دینامیکی با مقایسه پارامترهای مودال حاصل از نتایج آزمون مودال و مدل‌های عددی می‌باشد. پس از بهبود مدل عددی، می‌توان با اطمینان از آن در تحلیل‌های بعدی مانند پیش‌بینی پاسخ به یک نیروی وارده بر سازه، کوپلینگ سازه‌ها، تحلیل تنش و غیره استفاده کرد. در این مقاله مزایا، معایب و محدودیت‌های یکی از روش‌های بهبود مدلی دینامیکی سازه‌ها به نام روش حساسیت ویژه معکوس مورد بررسی قرار گرفته و در مرحله ابتدایی از ماکروالمان‌ها برای مکان‌یابی خطاها استفاده شده است. همچنین برای درک بهتر روش یک مدل ۶ درجه آزادی جرم و فنر توسط نرم افزار **MATLAB** مدل شده است.

واژگان کلیدی: بهبود مدل اجزاء محدود، آنالیز مودال، ماتریس جرم، ماتریس سختی، ماتریس خطا، آنالیز حساسیت.

مقدمه

(۱) خطاهای حاصل از به کارگیری فرضیات و تئوری‌های نامناسب و ناقص مثل به کاربردن معادله حالت خطی در روش اجزاء محدود در حالی که رفتار سیستم غیر خطی می‌باشد.

(۲) استفاده از مدل‌های نامناسب المان‌های سازه مانند مدل اجزاء محدود جوش، پرچ، پیچ و غیره که به درستی رفتار این اتصالات را نشان نمی‌دهد.

(۳) به کار بردن الگوریتم‌های نامناسب حل، به خصوص در مواردی که تعداد المان‌های سازه زیاد می‌باشد.

(۴) وجود خطا در مدل سازی جزئیات سازه‌های پیچیده.

(۵) عدم اطلاع صحیح از خواص مواد استفاده شده در مدل اجزاء محدود سازه.

(۶) خطاهای ناشی از ورود اطلاعات نادرست توسط کاربر به برنامه کامپیوتری.

موارد فوق از خطاهای اصلی است که در مدل اجزاء محدود سازه رخ می‌دهد.

مفهوم بهبود مدل اوین و امیرگان

تحقیق جالبی توسط [۳] در سال ۱۹۸۸ انجام شد که در آن نتایج حاصل از مدل اجزاء محدود یک سازه که توسط دوازده متخصص به طور مجزا و با نرم افزارهای رایج FEM انجام شد را جمع آوری کردند. هم‌چنین ضرائب دینامیکی این سازه را در آزمایشگاه نیز به دست آوردند. نتایج مدل‌های عددی و آزمایشگاهی نشان داد که مدل‌های FEM با یکدیگر متفاوت و نتایج همگی نیز با نتایج آزمایشگاهی تفاوت دارند.

هدف از روش‌های بهبود مدل، اصلاح ماتریس‌های جرمی، سختی و میرائی مدل عددی سازه به نحوی است که تفاوت نتایج عددی و آزمایشگاهی کم‌نیه شود. پس از استفاده از الگوریتم بهبود مدل، می‌توان در سایر مراحل تحلیل و طراحی با اطمینان از مدل عددی و نتایج آن استفاده کرد.

امروزه در طراحی و ساخت کلیه سازه‌های مهندسی تحلیل دینامیکی نقش مهم و کاربردی دارد. اما به علت در دسترس نبودن جواب تحلیلی برای سازه‌های پیچیده با بارگذاری‌ها و شرایط مرزی مختلف، مدل‌های تقریبی عددی با استفاده از روش اجزاء محدود، روش تفاضل محدود و روش المان‌های مرزی ارائه و استفاده می‌گردد.

از میان روش‌های فوق، روش اجزاء محدود امروزه کاربرد وسیع‌تری در تحلیل‌های دینامیکی - استاتیکی سازه‌ها دارد. اما به علت خطاهای مدل کردن از جمله عدم اطلاع از رفتار دقیق سازه، عدم مدل کردن صحیح شرایط مرزی و خطاهای عددی، مدل‌های عددی همواره دارای خطا می‌باشند. در سازه‌های پیچیده اعتبار مدل اجزاء محدود باید حتماً مورد بررسی قرار گیرد، زیرا مدل عددی در این گونه موارد معمولاً دارای خطای بزرگی می‌باشد. یکی از روش‌های بررسی اعتبار مدل اجزاء محدود سازه انجام آزمون دینامیکی آن است. یعنی فرکانس‌های طبیعی و مودهای نوسانی به دست آمده از آزمون مودال باید انطباق قابل قبولی با مدل اجزاء محدود داشته باشند. در صورت عدم تطابق اولین قدم اصلاح مدل دینامیکی است. به چنین روش‌هایی اصطلاحاً بهبود مدل می‌گویند.

روش‌های متداول بهبود مدل عبارت هستند [۱]:

- Direct Matrix Updating Method (DMU)
- Error Matrix Method (EMM)
- Eigendynamic Constraint Method (ECM)
- Inverse Eigensensitivity Method (IEM)
- Response Function Methods (RFM)

خطاهای مدل‌های عددی

همان‌طور که در مقدمه ذکر شد ظهور روش‌های بهبود مدل در اثر عدم انطباق کمیت‌های دینامیکی حاصل از روش عددی و آزمون مودال است. به طور کلی مهم‌ترین خطاهای مدل عددی موارد زیر می‌باشند [۲]:

اگر در ماکروالمان \mathbf{i} ام هیچ‌گونه خطایی وجود نداشته باشد \mathbf{a}_i و \mathbf{b}_i واحد خواهد بود. همان‌طور که مقادیر بسیار بیشتر و یا کمتر از واحد نشان دهنده یک مدل نامناسب است. ماتریس‌های $[\mathbf{M}]_i$ و $[\mathbf{K}]_i$ زیر ماتریس‌هایی از ماتریس‌های سیستم به حساب می‌آیند و ماتریس‌های $[\mathbf{M}]_U$ و $[\mathbf{K}]_U$ ماتریس‌های بهبود یافته جرمی و سختی سیستم می‌باشند.

موفقیت در روش **IEM** به شدت وابسته به انتخاب زیر ماتریس‌های $[\mathbf{M}]_i$ و $[\mathbf{K}]_i$ می‌باشد. ماتریس جرم از ماکروالمان \mathbf{i} ام - $[\mathbf{M}]_i$ - را می‌توان به صورت حاصل جمعی از چند المان حاضر نوشت :

$$[\mathbf{M}]_i = \sum_{j=1}^{n_j} [\mathbf{M}^e]_j \quad (3)$$

که n_j عبارت است از تعداد المان‌های جرم در المان بزرگ \mathbf{i} ام و $[\mathbf{M}^e]_j$ عبارت است از ماتریس جرم المان \mathbf{j} ام. به هم این ترتیب برای ماتریس سختی نیز خواهیم داشت:

$$[\mathbf{K}]_i = \sum_{j=1}^{n_j} [\mathbf{K}^e]_j \quad (4)$$

حال اگر بردار $\{\mathbf{p}\}$ را به صورت ضرایب تصحیح $\{a_1 a_2 \dots a_L b_1 b_2 \dots b_L\}$ فرض کنیم، مقدار این بردار در قدم اول خواهد بود:

$$\{P_o\} = \{I I \dots I I I \dots I\}^T$$

که بسط تیلور \mathbf{r} امین مقدار ویژه مدل به روز شده عبارت است از :

$$\lambda_{xr} = \lambda_{Ar} + \sum_{j=1}^{2L} \frac{\lambda_{Ar} \Delta P_j}{\partial P_j} + \sum_{j=1}^{2L} \sum_{k=1}^{2L} \frac{\partial^2 \lambda_{Ar}}{\partial P_j \partial P_k} \Delta P_j \Delta P_k + \dots \quad (5)$$

با صرف‌نظر از جملات با درجات دوم و بالاتر معادله فوق عبارت خواهد بود از :

$$\lambda_{xr} - \lambda_{Ar} = \sum_{j=1}^{2L} \frac{\partial \lambda_{Ar}}{\partial P_j} \Delta P_j = \Delta \lambda_r \quad (6)$$

به هم این ترتیب برای بردار ویژه نیز خواهیم داشت:

$$\{\Delta \phi\}_r \approx \sum_{j=1}^{2L} \frac{\partial \{\phi_A\}_r}{\partial P_j} \Delta P_j \quad (7)$$

و یا ماتریسی :

بهبود مدل‌های دینامیکی با استفاده از روش حساسیت ویژه معکوس (IEM)

یکی از روش‌های متداول بهبود مدل اجزا محدود، استفاده از ماتریس حساسیت ویژه معکوس^۱ می‌باشد، که به اختصار آن را روش **IEM** می‌نامند. اطلاعات لازم برای استفاده از این روش به شرح زیر می‌باشد:

(۱) ماتریس‌های سختی و جرمی حاصل از مدل اجزاء محدود.

(۲) خصوصیات دینامیکی سازه (شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی) حاصل از آزمون مودال.

این روش جزء روش‌های تکرار^۲ محسوب می‌شود و نسبت به روش‌های مستقیم دارای این برتری است که در آن نیازی به روش‌های فشرده سازی^۳ ماتریس‌های جرم و سختی نیست. بنابراین می‌توان در حالتی که تعداد درجات آزادی مدل عددی و آزمایشگاهی یکسان نیست، بدون بسط ماتریس‌های آزمایشگاهی یا کاهش مدل عددی به تصحیح مدل المان محدود پرداخت [۴].

در این روش برای حل دستگاه معادلات خطی و به دست آوردن ضرایب تصحیح هر المان از الگوریتم **SVD** استفاده می‌کنیم. این الگوریتم برای حل دستگاه معادلات تکین^۴ و دستگاه معادلاتی که تعداد مجهولات کمتر از معادلات می‌باشد به کار می‌رود.

در روش **IEM** ماتریس‌های بهبود یافته جرم و سختی به صورت تابعی از مقادیر تحلیلی قابل بیان هستند.

$$[\mathbf{M}]_U = \sum_{i=1}^L a_i [\mathbf{M}]_i \quad (1)$$

$$[\mathbf{K}]_U = \sum_{i=1}^L b_i [\mathbf{K}]_i \quad (2)$$

که در آن \mathbf{L} عبارآزمون از تعداد عناصر بزرگ و \mathbf{a}_i و \mathbf{b}_i ضرایب تصحیح می‌باشند که باید محاسبه شوند .

1 - Inverse Eigensensitivity Method

2 - Iteration Methods

3- Condensation

4 - singular

$$\alpha_{rj}^i = \begin{cases} \frac{-\lambda_r \{\phi\}_r^T [M]_i \{\phi\}_r}{\lambda_r - \lambda_j} & r \neq j \\ -\frac{1}{2} \{\phi\}_j^T [M]_i \{\phi\}_r & r = j \end{cases} \quad (۸)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta \lambda_r \\ \{\Delta \phi\}_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_{Ar}}{\partial a_i} & \dots & \frac{\partial \lambda_{Ar}}{\partial a_r} & \frac{\partial \lambda_{Ar}}{\partial b_i} & \dots & \frac{\partial \lambda_{Ar}}{\partial b_r} \\ \frac{\partial \{\Delta \phi\}_r}{\partial a_i} & \dots & \frac{\partial \{\Delta \phi\}_r}{\partial a_r} & \frac{\partial \{\Delta \phi\}_r}{\partial b_i} & \dots & \frac{\partial \{\Delta \phi\}_r}{\partial b_r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta a_i \\ \vdots \\ \Delta a_r \\ \Delta b_i \\ \vdots \\ \Delta b_r \end{Bmatrix}$$

معادله کنونی را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

$$\{\Delta_r\}_{(n+1) \times 1} = [S^0]_{(n+1) \times 2L} \{\Delta P\}_{2L \times 1} \quad (۹)$$

عناصر ماتریس حساسیت $[S^0]$ با مشتق پذیری از معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} ([K] - \lambda_r [M]) \{\phi_r\} &= \{0\} \\ \{\phi_r\}^T [M] \{\phi_r\} &= I \end{aligned}$$

با محاسبه این مشتقات داریم:

$$(۱۰)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_r}{\partial p_i} &= \{\phi_r\}^T \frac{\partial [K]}{\partial p_i} \{\phi_r\} - \lambda_r \{\phi_r\}^T \frac{\partial [M]}{\partial p_i} \{\phi_r\} \\ \frac{\partial \{\phi_r\}}{\partial p_i} &= \sum_{j=1}^N C_{rj}^i \{\phi_j\} \end{aligned} \quad (۱۱)$$

که در آن مقدار C_{rj}^i به صورت زیر است:

$$C_{rj}^i = \begin{cases} \frac{\{\phi_j\}^T \left(\frac{\partial [K]}{\partial p_i} - \lambda_r \frac{\partial [M]}{\partial p_i} \right) \{\phi_r\}}{\lambda_r - \lambda_j} & r \neq j \\ -\frac{1}{2} \{\phi_j\}^T \frac{\partial [M]}{\partial p_i} \{\phi_r\} & r = j \end{cases}$$

از معادلات (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [M]}{\partial a_i} = [M]_i & \quad \frac{\partial [M]}{\partial b_i} = 0 \\ \frac{\partial [K]}{\partial a_i} = [0] & \quad \frac{\partial [M]}{\partial b_i} = [K]_i \end{aligned} \quad (۱۲)$$

با جای‌گذاری (۱۲) در (۱۰) و (۱۱) داریم:

$$\frac{\partial \lambda_r}{\partial a_i} = -\lambda_r \{\phi_r\}^T [M]_i \{\phi_r\} \quad (۱۳-الف)$$

$$\frac{\partial \lambda_r}{\partial b_i} = \{\phi_r\}^T [K]_i \{\phi_r\} \quad (۱۳-ب)$$

$$\frac{\partial \{\phi_r\}}{\partial a_i} = \sum_{j=1}^N \alpha_{rj}^i \{\phi_j\} \quad (۱۴-الف)$$

و

$$\frac{\partial \{\phi_r\}}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^N \beta_{rj}^i \{\phi_j\} \quad (۱۴-ب)$$

$$\beta_{rj}^i = \begin{cases} \frac{\{\phi_j\}^T [K]_i \{\phi_r\}}{\lambda_r - \lambda_j} & r \neq j \\ 0 & r = j \end{cases}$$

معادله (۱۴) نیازمند N بردار ویژه برای محاسبه مشتقات بردار ویژه است. برای یک سیستم بزرگ تنها تعداد اندکی (مثلاً n_1) مود به طور دقیق قابل محاسبه است ضمن این‌که مدت زمان زیادی باید صرف محاسبه N بردار ویژه در هر گام شود.

لیم و دستیارانش [۵] روش جدیدی را بیان کردند که می‌توانست بردارهای ویژه لازم برای محاسبه مشتقات آن‌ها را بکاهد. وقتی $r \ll n_1$ باشد ضریب C_{ij}^i در معادله (۱۱) به صورت زیر قابل تقریب است:

$$\lambda_r - \lambda_j \approx \lambda_c - \lambda_j \quad j > n_1$$

که λ_c مقداری بین صفر تا اولین مقدار ویژه غیر صفر است. بنابراین:

$$(۱۵)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{\phi_r\}}{\partial p_i} &\approx \sum_{j=1}^{n_1} C_{rj}^i \{\phi_j\} + \sum_{j=n_1+1}^{n_1} \frac{\{\phi_j\}^T \{g\}_r \{\phi_j\}}{\lambda_c - \lambda_j} \\ &\approx \sum_{j=1}^{n_1} C_{rj}^i \{\phi_j\} + \sum_{j=1}^N \frac{\{\phi_j\}^T \{g\}_r \{\phi_j\}}{\lambda_c - \lambda_j} - \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\{\phi_j\}^T \{g\}_r \{\phi_j\}}{\lambda_c - \lambda_j} \end{aligned}$$

که در آن:

$$\{g\}_r = \left(\frac{\partial [K]}{\partial p_i} - \lambda_r \frac{\partial [M]}{\partial p_i} \right) \{\phi_r\}$$

با توجه به شرط تعامد:

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Lambda]$$

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I]$$

خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i} \\ \frac{\Delta \phi_i}{\phi_i} \\ \vdots \\ \frac{\Delta \lambda_m}{\lambda_m} \\ \frac{\Delta \phi_m}{\phi_m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_{A1}}{\partial a_1} / \lambda_1 & \dots & \frac{\partial \lambda_{A1}}{\partial a_L} / \lambda_1 & \frac{\partial \lambda_{A1}}{\partial b_1} / \lambda_1 & \dots & \frac{\partial \lambda_{A1}}{\partial b_L} / \lambda_1 \\ \frac{\partial \phi_{A1}}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial \phi_{A1}}{\partial a_L} & \frac{\partial \phi_{A1}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \phi_{A1}}{\partial b_L} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_{Am}}{\partial a_1} / \lambda_m & \dots & \frac{\partial \lambda_{Am}}{\partial a_L} / \lambda_m & \frac{\partial \lambda_{Am}}{\partial b_1} / \lambda_m & \dots & \frac{\partial \lambda_{Am}}{\partial b_L} / \lambda_m \\ \frac{\partial \phi_{Am}}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial \phi_{Am}}{\partial a_L} & \frac{\partial \phi_{Am}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \phi_{Am}}{\partial b_L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta a_1 \\ \vdots \\ \Delta a_L \\ \Delta b_1 \\ \vdots \\ \Delta b_L \end{Bmatrix}$$

و یا

$$\{\Delta\}_{m(n+1) \times l} = [S]_{m(n+1) \times 2L} \{\Delta p\}_{2L \times l} \quad (22)$$

شرط لازم برای **over-determined** بودن رابطه

$$(22) \quad \text{این است که: } m > \frac{2L}{n+1} \quad \text{یا} \quad m(n+1) > 2L$$

از آنجایی که حساسیت های بردارهای ویژه همیشه مستقل خطی نیستند، در عمل تعداد موده های اندازه گیری شده می بایست از دو برابر مقدار کمینه بیشتر باشد، تا احتمال کافی بودن رتبه ماتریس حساسیت بالا باشد.

با استفاده از تکنیک **SVD** می توان وضعیت ماتریس حساسیت را چک کرد [۶]. هم چنین می توان از آن برای محاسبه $[\Sigma]$ نیز استفاده کرد.

اگر $[S]$ دارای رتبه کامل باشد رابطه (۲۲) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\{\Delta\}_{m(n+1) \times l} = [U]_{m(n+1) \times m(n+1)} [\Sigma]_{m(n+1) \times 2L} [V]^T_{2L \times 2L} \{\Delta p\}_{2L \times l} \quad (23)$$

که $[U]$ و $[V]$ ماتریس های متعامد هستند و $[\Sigma]$ ماتریسی با المان های σ_{ij} می باشد.

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_i & i = j \\ \sigma_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

که σ_i مقادیر تکین ماتریس حساسیت هستند. از آنجایی که $[U]$ و $[V]$ متعامد و دارای رتبه کامل هستند، حل رابطه (۲۳) به صورت زیر امکان پذیر است.

$$\{\Delta p\} = [V] [\Sigma]^+ [U]^T \{\Delta\} \quad (24)$$

که علامت + نشان دهنده معکوس مور-پنروس^۵ است و $[\Sigma]^+$ شامل معکوس مقادیر تکین غیر صفر σ_i می باشد. با اضافه کردن مقدار اصلاحی به بردار جواب داریم:

$$\{P\}_{new} = \{P\}_{old} + \{\Delta P\} \quad (25)$$

$$[\Phi]^T [K - \lambda_c M] [\Phi] = [\Lambda] - \lambda_c [I]$$

یا:

$$[\Phi]^{-1} [K - \lambda_c M]^{-1} [\Phi]^{-T} = ([\Lambda] - \lambda_c [I])^{-1}$$

بنابراین داریم:

$$[K - \lambda_c M]^{-1} = [\Phi] ([\Lambda] - \lambda_c [I])^{-1} [\Phi]^T = \sum_{j=1}^N \frac{\{\Phi\}_j^T \{\Phi\}_j}{\lambda_j - \lambda_c} \quad (16)$$

با جای گذاری رابطه (۱۶) در رابطه (۱۵) خواهیم داشت:

$$(17)$$

$$\frac{\partial \{\phi\}_r}{\partial p_i} \approx \sum_{j=1}^{n_i} C_{ij}^i \{\phi\}_j - [K - \lambda_c M]^{-1} + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\{\phi\}_j^T \{g\}_r}{\lambda_j - \lambda_c} \{\phi\}_j$$

حال اگر به جای رابطه (۱۱) از رابطه (۱۷) برای محاسبه مشتقات بردارهای ویژه استفاده شود، به جای \mathbf{N} بردار ویژه، تنها نیاز به \mathbf{n}_1 بردار ویژه ($\mathbf{n}_1 \ll \mathbf{N}$) خواهیم داشت. ضمناً در صورتی که موده های صلب در نظر گرفته نشوند، λ_c را می توان صفر قرار داد.

اگر تعداد \mathbf{m} مود اندازه گیری شده باشند، رابطه (۹) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\{\Delta_r\}_{m(n+1) \times l} = [S^o]_{m(n+1) \times 2L} \{\Delta P\}_{2L \times l} \quad (18)$$

در رابطه (۱۸) به علت این که اندازه مشتقات بردارهای ویژه معمولاً نسبت به اندازه مشتقات مقادیر ویژه بسیار کوچک هستند، بنابراین این احتمال وجود دارد که ماتریس حساسیت نامتعادل باشد.

از روابط (۱۰) و (۱۱) داریم:

$$\left| \frac{\partial \lambda_r}{\partial p_i} \right| = O(\lambda_r \{\phi\}_r^T \frac{\partial [M]}{\partial p_i} \{\phi\}_r) \quad (19)$$

$$\left\| \frac{\partial \{\phi\}_r}{\partial p_i} \right\| = O(\{\phi\}_r^T \frac{\partial [M]}{\partial p_i} \{\phi\}_r) \quad (20)$$

بنابراین داریم:

$$\left| \frac{\partial \lambda_r}{\partial p_i} \right| \approx \lambda_r \left\| \frac{\partial \{\phi\}_r}{\partial p_i} \right\| \quad (21)$$

بنابراین به جای رابطه (۱۸) می توان نوشت :

تجربی فاصله دارد و بعضی فرکانس‌ها نزدیک و برخی دور شده‌اند. این امر به این دلیل می‌باشد که ضرایب اصلاح به دست آمده مربوط به ماکروالمان‌ها می‌باشد و هر ماکروالمان از تجمیع دو المان **FEM** حاصل شده است و با توجه به اینکه خطای ایجاد شده در هر المان **FEM** متفاوت بوده، در نتیجه مدل به روز رسانی شده به مدل تجربی نزدیک نشده است.

حال در مرحله دوم، مدل به روز رسانی شده بالا را با انتخاب المان‌های **FEM** به عنوان ماکروالمان‌ها دوباره به روز می‌رسانیم. پس از حل نتایج زیر حاصل گردید، که برای مقایسه بهتر α_{26} ، فرکانس‌های طبیعی و **MAC** در دو حالت قبل و بعد از بهبود مدل رسم گردیدند

همان‌طور که در شکل‌های (۶)، (۷)، (۸) و (۹) مشاهده می‌شود، مدل عددی به روز رسانی شده کاملاً به مدل تجربی نزدیک شده است و فرکانس‌ها و شکل مودها بر هم منطبق شده‌اند.

در یک سیستم با تعداد درجه آزادی زیاد - که سیستم‌های واقعی معمولاً از این نوع اند - حتماً باید از ماکروالمان‌ها استفاده شود [۷]. با استفاده از ماکروالمان، هم زمان محاسبات و هم تعداد مودهای تجربی مورد نیاز کاهش می‌یابد و هم میزان واگرایی کاهش می‌یابد.

نتیجه‌گیری

یکی از مزایای به روز رسانی مدل با استفاده از روش آنالیز حساسیت ویژه این است که نیازی به بسط مودی یا کاهش ماتریس‌های جرم و سختی نیست. هم‌چنین این روش پیوستگی سازه را حفظ کرده و مدل بهبود یافته از لحاظ فیزیکی با معنا خواهد بود. با این وجود این روش به دلیل حل مکرر مساله دینامیک ویژه و محاسبات مکرر ماتریس حساسیت، نیازمند انجام محاسبات بزرگ می‌باشد. هم‌چنین اگر خطاهای مدل سازی کوچک نباشند، ضمانتی برای همگرایی آن وجود ندارد. در این روش در صورت مکان یابی خطا در ابتدا و بهبود مدل عددی با استفاده از المان‌هایی که در مرحله قبل انتخاب شده‌اند، زمان انجام محاسبات آن کاهش خواهد یافت. در این مقاله به منظور کاهش زمان

این روال باید تا همگرایی کامل تکرار شود. زیرا به دو دلیل رابطه (۲۴) جواب صحیح نیست:

- (۱) رابطه (۷) و (۸) هر دو تقریب‌های مرتبه اول از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌اند.
- (۲) مناطق خطای پیش فرض لزوماً به طور کامل با مناطق بد مدل شده مطابقت ندارند

بهبود یک مدل ۶ درجه آزادی

برای بررسی و درک بهتر روش یک مدل جرم و فنر توسط نرم افزار **MATLAB** مدل گردید. در این برنامه کاربر ابتدا با توجه به درجات آزادی مدل مورد نظر ماتریس‌های جرم و سختی را مشخص می‌کند، که نتایج حاصل از آن بعنوان مقادیر آزمون در نظر گرفته می‌شود. سپس با وارد کردن خطای مورد نظر در المان‌های دلخواه مدل عددی را تشکیل می‌دهد. حال برنامه در ادامه کار به روش **IEM** خطاهای ایجاد شده را تشخیص و مدل عددی را به مدل واقعی نزدیک می‌کند.

برای بررسی نتایج یک مدل ۶ درجه آزادی با مشخصات زیر در نظر گرفته شد.

$$\begin{aligned} m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6 &= 1 \text{ Kg} \\ k_0=k_1=k_2 &= 10000 \text{ N/m} \\ k_3=k_4=k_5 &= 11000 \text{ N/m} \\ k_6 &= 0 \text{ N/m} \end{aligned}$$

و برای مدل عددی خطایی به صورت زیر فرض گردید:

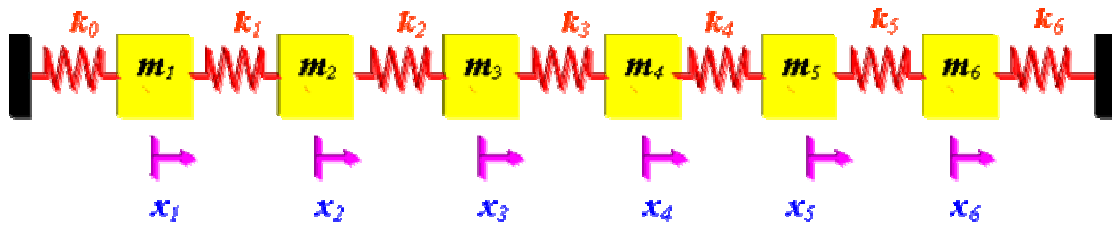
$$\begin{aligned} m_1 &= m_1 \times 1. & k_0 &= k_0 \times 1.75 \\ m_2 &= m_2 \times 1.2 & k_1 &= k_1 \times 1.01 \\ m_3 &= m_3 \times 1.5 & k_2 &= k_2 \times 1.432 \\ m_4 &= m_4 \times 1.4 & k_3 &= k_3 \times 0.6 \\ m_5 &= m_5 \times 0.4 & k_4 &= k_4 \times 1.59 \\ m_6 &= m_6 \times 1.05 & k_5 &= k_5 \times 1.75 \\ & & k_6 &= k_6 \end{aligned}$$

در سیستم ۶ درجه آزادی فوق فرض شده که نتایج مربوط به درجه آزادی ۵ام و ۶ام قابل اندازه‌گیری نمی‌باشد. بنابراین با حذف مقادیر عددی مربوط به درجات آزادی و مودهایی که قابل اندازه‌گیری نمی‌باشد و برای حالت انتخاب جفت المان‌های **FEM** به عنوان ماکروالمان نتایج به دست آمد.

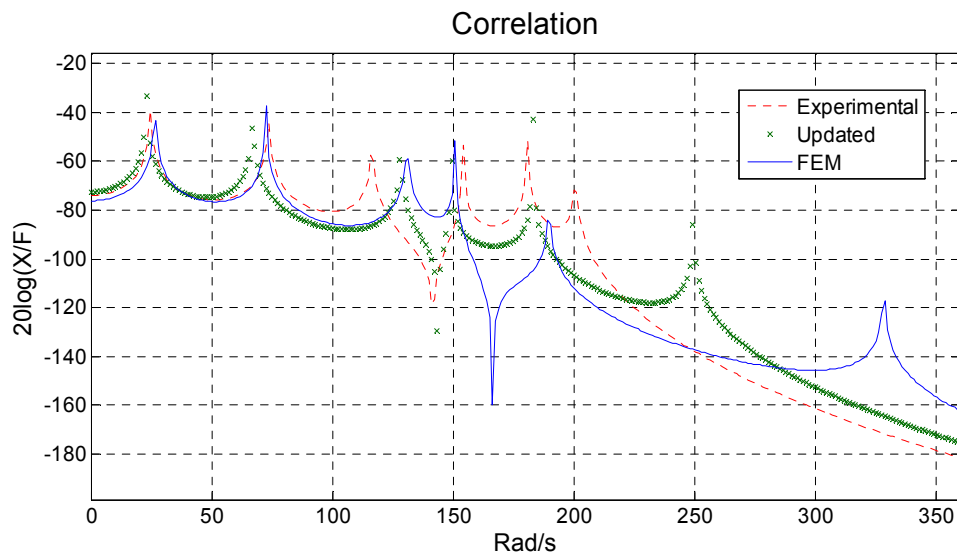
همان‌طور که در شکل‌های (۲)، (۳)، (۴) و (۵) مشاهده می‌شود، مدل عددی به روز رسانی شده با مدل

همچنین این روش در مواردی که سیستم عددی دارای ماتریس میرائی باشد، کارایی ندارد. در این مقاله نشان داده شده است، در صورتی که تعداد مودهای اندازه گیری شده کافی بوده و خطاهای مدل سازی کوچک باشد و در ابتدا از ماکروالمانها برای مکان یابی خطاها استفاده شود، این روش توانایی محاسبه دقیق ضرایب تصحیح و ضرائب مودال را دارد.

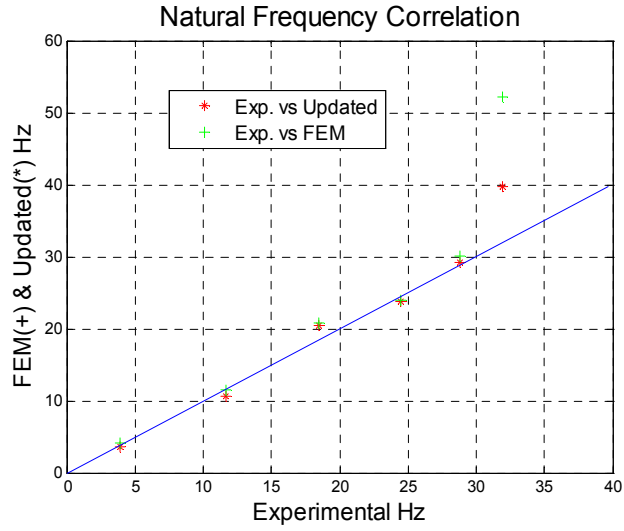
محاسبات و همچنین کاهش تعداد مودهای تجربی مورد نیاز، یک روش حساسیت که در آن از ماکروالمانهای دلخواه استفاده می‌شود، به کار گرفته شده است. مشاهده می‌شود که به این طریق مساله بهبود مدل عددی که ماهیتاً یک مساله کم معین^۶ می‌باشد به یک مساله بیش معین^۷ تبدیل شده و نحوه تعریف و انتخاب ماکروالمانها تاثیر چندانی بر مدل بهبود یافته ندارد. در این روش بهبود مدل به دلیل استفاده از نتایج تحلیل مودال (فرکانس های طبیعی و شکل مودها) علاوه بر این که خطاهای اندازه گیری به مساله وارد می‌شود، خطاهای مربوط به تعیین مقدار فرکانس ها^۸ و به طبع آن شکل مودها توسط آزمایش کننده نیز به محاسبات وارد می‌شود و با توجه به این که ما در این جا مدل تجربی را مدل واقعی فرض می‌کنیم و به دنبال رساندن مدل عددی به آن هستیم، در حقیقت این فرض نمی‌تواند صد درصد درست باشد.



شکل ۱- سیستم جرم و فنر ۶ درجه آزادی

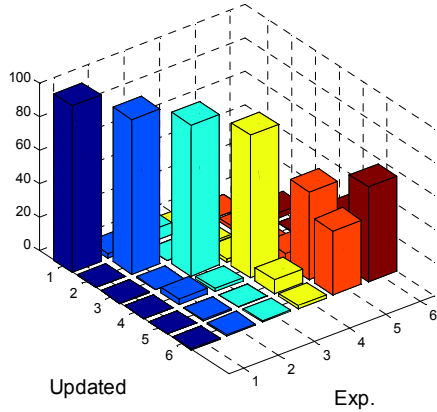


شکل ۲- مقایسه α_{26} قبل و بعد از بهبود مدل



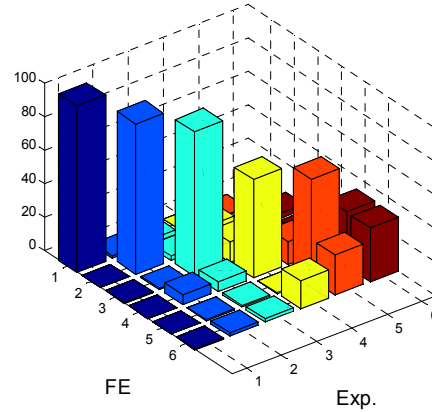
شکل ۳- مقایسه فرکانس های طبیعی قبل و بعد از بهبود مدل

Modal Assurance Criterion (MAC)%, After Updating

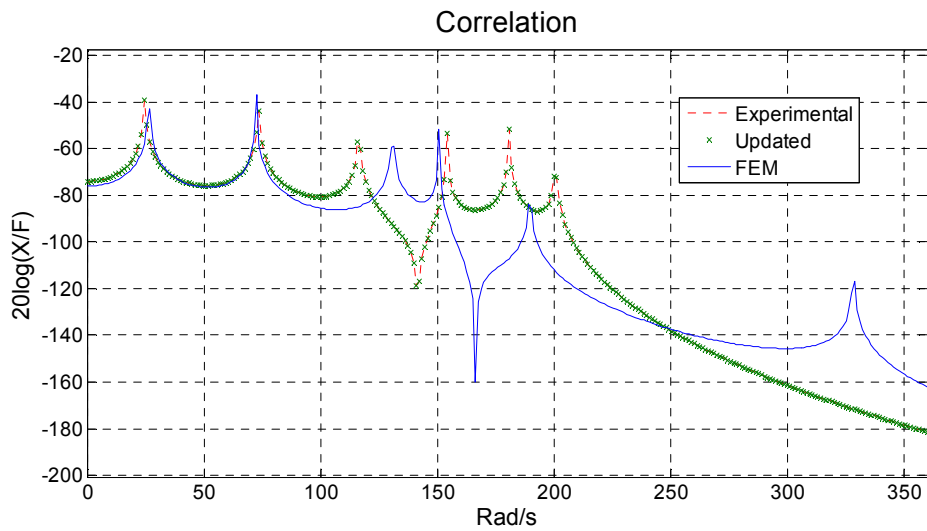


شکل ۵- سه %MAC بعدی بعد از بهبود مدل

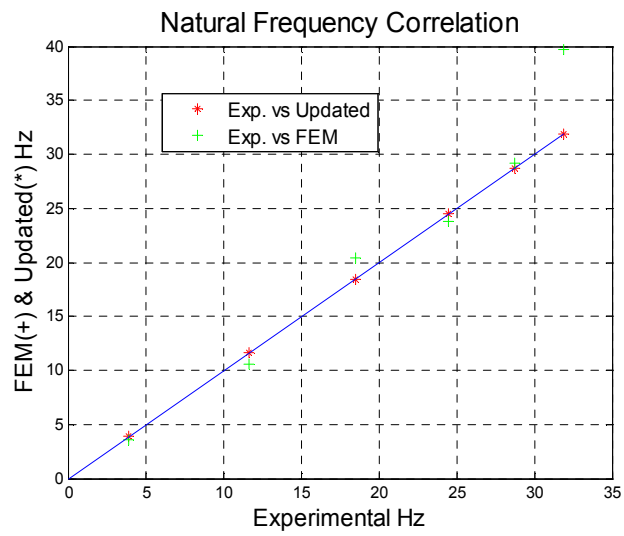
Modal Assurance Criterion (MAC)%, Before Updating



شکل ۴- سه %MAC بعدی قبل از بهبود مدل

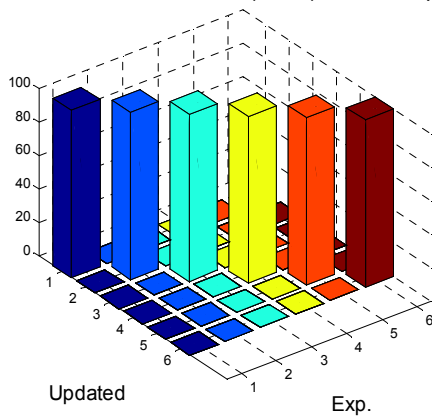


شکل ۶- مقایسه α_{26} قبل و بعد از بهبود مدل



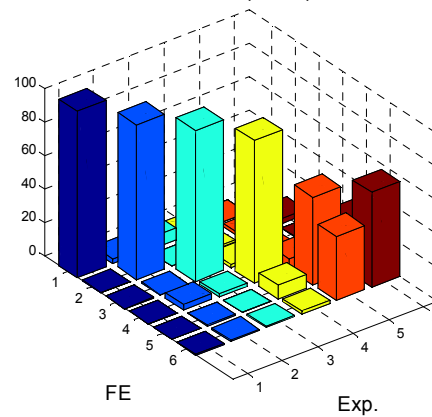
شکل ۷- مقایسه فرکانس‌های طبیعی قبل و بعد از بهبود مدل

Modal Assurance Criterion (MAC)%, After Updating



شکل ۹- %MAC سه بعدی بعد از بهبود مدل

Modal Assurance Criterion (MAC)%, Before Updating



شکل ۸- %MAC سه بعدی قبل از بهبود مدل

مراجع

- [1] Ewins, D. J., "Modal Testing: Theory, Practice and Application", 2nd Ed, RESEARCH STUDIES PRESS LTD., England, 2000.
- [2] Ziaei Rad, S., "Methods for Updating Numerical Models in Structural Dynamic", Ph.D. Thesis, Imperial College London, 1997.
- [3] EWINS, D. J., IMREGUN, M., "On the reliability of computational dynamic response Prediction capabilities (DYNAS)", Society of Environmental Engineers, Journal. Vol. 27-1, pp. 3-13. Mar. 1988.
- [4] Jung, H., "Structural Dynamic Model Updating Using Eigensensitivity Analysis" Ph.D. Thesis, Imperial College London, 1992.
- [5] Lim, K.B., Junkins, J.L. and Wang, B.P., "Re-examination of Eigenvector Derivatives", J. Guidance, Vol. 10, No. 6, pp. 581-587, 1987.
- [6] Stewart, G.W., "Introduction to Matrix Computations", Academic Press, Orlando, 1973.
- [7] Sidhu, J. and Ewins, D. J. "Correlation of Finite Element and Modal Test Studies of a Practical Structure", Proc. of the 2nd Int. Modal Analysis Conf., pp 756-762, 1984.

