بهینه‌سازی کمانش ستون‌های چندتکه با مقطع خطی متغیر (شیب به عنوان متغیر طراحی)

علی قدوسیان[۱و*]، رسول فرجی[۲]

۱- استادیار گروه مهندسی مکانیک، پردیس فنی، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد،گروه مهندسی مکانیک، پردیس فنی، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

ali.ghoddosian@gmail.com

(دریافت مقاله: مهر ۱۳۸۷، پذیرش مقاله: آبان ۱۳۸۷)

چکیده

در این تحقیق مسئله بهینه‌سازی ستون‌های چندتکه با مقطع ثابت و متغیر بررسی شده است. متغیرهای بهینه‌سازی طول و شعاع ژیراسیون بوده و تابع هدف، مقدار بار بحرانی کمانش است. ملاک بهینه‌سازی بیشینه کردن نیروی کمانش است. مسائل مختلفی برای شرایط مرزی گوناگون از جمله یک سردرگیر، دوسردرگیر و دوسرپین‌دار حل شده است. برای مسائل مقطع متغیر فرض شده است که شعاع ژیراسیون به صورت خطی نسبت به طول تغییر می‌کند. نتایج مربوط به ستون یک‌تکه، دوتکه و سه‌تکه با شیب‌های متفاوت نیز آورده شده و نتایج مربوطه نیز مورد بررسی واقع شده است. برای پاره‌ای مسائل کاربردی که شعاع ژیراسیون و یا طول تکه‌ای از ستون باید ثابت باشد، بقیهٔ متغیرها به جز مقادیر از قبل معلوم بهینه شده‌اند.

واژگان کلیدی *: بهینه سازی سازه، کمانش، تیر ، ستون .*

*- عهده دار مکاتبات: گروه مهندسی مکانیک، پردیس فنی، دانشگاه سمنان، **ali.ghoddosian@gmail.com**

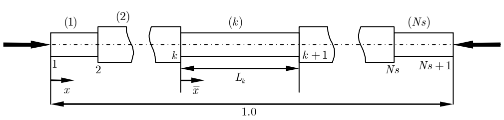
مقدمه

بالا بودن نیروی کمانش بر عملکرد، بهره برداری و نگهداری سازه ها در حوزه‌های مهندسی مختلف از جمله مکانیک، عمران، هوافضا، صنایع خودرو و سازه‌های دریایی تاثیرگذار است. هرگاه ورق و پوسته‌های نازک با حجم ثابت، به درستی تغییرشکل دهند، می‌توانند نیروی کمانش بالایی را تحمل کنند.

هورن باکل و بویکین[۱] در سال ۱۹۷۸، بهینه سازی کمانشی تیر یک سر درگیر با مقطع گرد توپر را تحت نیروی محوری در سر آزاد آن و وزن تیر مورد بررسی قرار دادند و ۱۱/۵٪ بهبود به دست آوردند. ترنر و پلات[۲] در سال ۱۹۸۰، ستون دو سر گیردار را با روش اجزاء محدود بهینه سازی کردند و ۲۷/۶٪ بهبود به دست آوردند. گو و همکارانش[۳] در سال ۱۹۹۱، بهینه سازی کمانشی ستون پنج تکه را بررسی کردند که سطح مقطع و طول هر تکه متغیر طراحی بود. مساله بهینه سازی از پیچیدگی های ریاضی زیادی برخوردار بود. مالوی[۴] در سال ۲۰۰۲، بهینه سازی کمانشی ستونهای چند تکه را مورد بررسی قرار داد و از هیچ فرضی بین ممان و سطح استفاده نکرد و برای ستون یک سر گیردار با کمانشی را ۳۰٪ بهبود داد .

کمانش ستون چندتکه با مقطع ثابت [4]

در این تحقیق، مسئله بهینه کردن یک تیر با چندین مقطع که همگی دارای سطح مقطع های ثابت در جهت طول هستند بررسی می شود. مقطع هر تکه ثابت بوده ولی ممکن است با مقطع تکه های دیگر از نظر اندازه متفاوت باشد. منظور از بهینه کردن، تعیین حداکثر نیروی بحرانی کمانش است که ستون مذکور می$\mathbf{Z}$تواند تحمل کند. محدودیتی روی تعداد تکه ها وجود ندارد و طول و سطح مقطع آنها اختیاری است. شکل ۱ نمای کلی این تحلیل را نشان می دهد.



شکل ۱، نمای کلی تحلیل ستون‌ها چندتکه

ساده ترین مسئله، ستونی است که تحت بار محوری و فشاری P قرار دارد که اولین بار توسط اولر در نیمه قرن ۱۸ فرمول بندی و حل شد. معادله دیفرانسیل کمانش- خمش حاکم بر هر تکه با مقطع ثابت به صورت زیر است.

$$EI_k \frac{d^4y}{dx^4} + P\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad (۱)$$

که در آن E مدول الاستیسیته، I_k ممان دوم سطح مقطع مورد نظر، P بار محوری اعمال شده، y خیز عرضی و x نشان دهنده مختصات محوری است. چنانچه معادله حل شود، جواب عمومی آن به صورت زیر خواهد بود.

$$y = a_1\sin(p_k x) + a_2\cos(p_k x) + a_3 x + a_4 \qquad 0 \le x \le L \qquad (۲)$$

که در آن $p_k^2 = \frac{P}{EI_k}$ متغیر کمکی است. هر کدام از ثابت های a_1، a_2، a_3 و a_4 با توجه به شرایط مرزی به دست می آیند. متغیرهای y خیز عرضی، y' شیب خیز یا زاویه خیز، M گشتاور و Q بار برشی چهار متغیر حالتی هستند که شرایط یک مسئله تیر یا ستون را می توانند ایجاد کنند. با توجه به شرایط مرزی، هر کدام از این ضرایب می توانند مقدار خاصی به خود بگیرند. برای مثال، ستونی را در نظر بگیرید که از یک طرف درگیر و از طرف دیگر آزاد باشد. در این صورت، در قسمت درگیر ستون، y و y' صفر خواهد بود و در قسمت آزاد تیر، M و Q مقدار صفر به خود می گیرند. هر کدام از ثابت های a_1، a_2، a_3 و a_4 را می توان بر حسب متغیرهای حالت y، y'، M و Q نوشت. برای این کار لازم است این ضرایب به درستی تعریف شوند. متغیر y بیان کننده خیز ستون است. متغیر y' نشان دهنده شیب تیر یا ستون بوده و با یک بار مشتق گرفتن از رابطه خیز، y، به دست می آید. رابطه گشتاور یا ممان از رابطه زیر به دست می آید.

$$M = EI\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (۳)$$

بنابر این برای به دست آوردن مقدار M، کافی است دو بار از رابطه تیر مشتق گرفته شود. با توجه به وجود بار محوری، Q از رابطه زیر به دست می آید.

$$Q - Py' = \frac{dM}{dx} = EI\frac{d^3y}{dx^3} \qquad (۴)$$

که در آن P نشان دهنده بار محوری است. بنابر این با سه بار مشتق گرفتن از رابطه خیز و هم چنین با استفاده از از رابطه y'، مقدار Q به دست می‌آید. مشتقات اول تا سوم معادله خیز به صورت زیر خواهند بود.

$$\begin{cases} y' = a_1 p_k \cos(p_k x) - a_2 p_k \sin(p_k x) + a_3 \\ y'' = -a_1 p_k^2 \sin(p_k x) - a_2 p_k^2 \cos(p_k x) \\ y''' = -a_1 p_k^3 \cos(p_k x) + a_2 p_k^3 \sin(p_k x) \end{cases} \tag{۵}$$

هر کدام از ضرایب a_1، a_2، a_3 و a_4 را می‌توان بر حسب متغیرهای حالت در نقطه $x = 0$ به دست آورد. با داشتن مقادیر a_1، a_2، a_3 و a_4 بر حسب متغیرهای حالت ابتدای تکه، متغیرهای حالت انتهای تیر نیز بر حسب متغیرهای حالت ابتدای تیر به دست می آیند.

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \dfrac{\sin(P_k L_k)}{P_k} y'_k + \dfrac{1-\cos(P_k L_k)}{P} M_k + \left(\dfrac{L_k}{P} - \dfrac{\sin(P_k L_k)}{P p_k}\right) Q_k \\ y'_{k+1} = \cos(P_k L_k) y'_k + \dfrac{p_k \sin(P_k L_k)}{P} M_k + \dfrac{1-\cos(P_k L_k)}{P} Q_k \\ M_{k+1} = EI\left[-p_k \sin(P_k L_k) y' + \dfrac{p_k^2 \cos(P_k L_k)}{P} M_k + \dfrac{p_k \sin(P_k L_k)}{P} Q_k\right] \\ Q_{k+1} = Q_k \end{cases}$$

(۶)

این معادلات را می توان به صورت کاربردی تری نشان داد. استفاده از کمیت های بی بعد، می تواند مسئله را کاربردی تر کند. چراکه با استفاده از این ضرایب می توان مسئله را به صورت کلی با هر اندازه و شکلی حل نمود. ضرایب بی بعد دخیل در این مسئله به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\begin{cases} M_k^* = M_k \dfrac{L}{EI} \\ P^* = P \dfrac{L^2}{EI} \\ Q_k^* = Q_k \dfrac{L^2}{EI} \\ I_k^* = \dfrac{I_k}{I} \end{cases} , \quad \begin{cases} L_k^* = \dfrac{L_k}{L} \\ r_k^* = \dfrac{r_k}{r} \\ A_k^* = \dfrac{A_k}{A} \\ y_k^* = \dfrac{y_k}{L} \end{cases} \tag{۷}$$

که در آن M گشتاور، P بار محوری، Q بار برشی، I ممان دوم سطح، L طول ستون، r شعاع ژیراسیون، A سطح مقطع و y خیز ستون است. برخی کمیت های بی بعد دیگر به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} &M_s^* = \frac{M_s}{M} = \frac{\sum_1^{Ns} \rho A_k L_k}{\rho A L} = \sum_1^{Ns} \frac{A_k}{A}\frac{L_k}{L} = \sum_1^{Ns} A_k^* L_k^* \\ &p_k^{*2} = p_k^2 L^2 = \frac{P^*}{I_k^*} \end{aligned} \tag{۸}$$

که در آن M_s جرم هر تکه ستون است. برای حل مسئله بهینه سازی کمانش یک ستون فرضیاتی روی جرم بی بعد اعمال شده که در ادامه به آن اشاره می شود. بعد از بی بعد کردن معادلات، برای جلوگیری از ایجاد متغیرهای اضافی، کمیت های بی بعد را با همان متغیر ولی بدون علامت * نشان داده می شود. بنابر این متغیرهای جایگزین و دخیل در معادلات به صورت زیر خواهند بود.

(۹)

$$\begin{cases} M_k^* \to M_k \\ P^* \to P \\ Q_k^* \to Q_k \\ I_k^* \to I_k \end{cases} , \quad \begin{cases} L_k^* \to L_k \\ r_k^* \to r_k \\ A_k^* \to A_k \end{cases} , \quad \begin{cases} y_k^* \to y_k \\ M_s^* \to M_s \\ p_k^{*2} \to p_k^2 \end{cases}$$

مجموعه معادلات را می توان به صورت ماتریسی نیز نشان داد. در صورت ماتریسی این معادلات، ماتریس ارتباط دهنده میان متغیرهای حالت ابتدا و انتهای ستون، ماتریس انتقال نامیده و این ماتریس به صورت زیر نشان داده می شود.

$$\begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y'_{k+1} \\ M_{k+1} \\ Q_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\sin(P_k L_k)}{P_k} & \dfrac{1-\cos(P_k L_k)}{P} & \dfrac{L_k}{P} - \dfrac{\sin(P_k L_k)}{P p_k} \\ 0 & \cos(P_k L_k) & \dfrac{p_k \sin(P_k L_k)}{P} & \dfrac{1-\cos(P_k L_k)}{P} \\ 0 & -\dfrac{P \sin(P_k L_k)}{p_k} & \cos(P_k L_k) & \dfrac{\sin(P_k L_k)}{p_k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ y'_k \\ M_k \\ Q_k \end{bmatrix}$$

(۱۰)

با داشتن ماتریس انتقال کل ستون و با توجه به شرایط مرزی می توان معادله مشخصه کمانش ستون را به دست آورد. با مد نظر قرار دادن شرایط مرزی و با توجه به این‌که جواب غیر بدیهی مسئله مد نظر می‌باشد، معادله مشخصه به دست می‌آید. در این تحقیق برای حل مسائل کمانش فرضیاتی شده است که به آن‌ها اشاره می‌شود. اول این که فرض شده است I ممان دوم سطح با مجذور سطح مقطع A^2، متناسب است. یعنی خواهیم داشت:

$$I = \alpha A^2 \tag{۱۱}$$

که در آن α مقداری ثابت است.

کمانش ستون‌های چندتکه با مقطع متغیر

در این قسمت فرض می‌شود که ممان دوم سطح نسبت به طول ستون متغیر بوده و از رابطهٔ زیر تبعیت کند.

$$I(x) = (a + bx)^4 \qquad (۱۲)$$

که در آن متغیرهای a و b مقادیر ثابتی هستند. با این فرض معادله دیفرانسیل کمانش- خمش ستون به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right) + P\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad (۱۳)$$

جواب عمومی متناظر با این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$y = c_1 + c_2x + c_3(a+bx)\cos\left(\frac{\sqrt{P/E}}{b(a+bx)}\right) + c_4(a+bx)\sin\left(\frac{\sqrt{P/E}}{b(a+bx)}\right) \qquad (۱۴)$$

هر کدام از ضرایب c_1، c_2، c_3 و c_4 را می‌توان بر حسب متغیرهای حالت y، y'، M و Q به دست آورد. برای به دست آوردن متغیرهای حالت باید به متغیر بودن ممان دوم سطح نیز توجه کرد. برای گشتاور خواهیم داشت:

$$M(x) = EI(x)\frac{d^2y}{dx^2} = E(a+bx)^4\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (۱۵)$$

بنابر این با یک بار مشتق گرفتن از رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\frac{dM(x)}{dx} = 4Eb(a+bx)^3y''(x) + E(a+bx)^4y'''(x) \qquad (۱۶)$$

نیروی برشی نیز از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$Q(x) = Py'(x) + \frac{dM(x)}{dx} \qquad (۱۷)$$

در نتیجه با استفاده از رابطهٔ (۱۶) و (۱۷) خواهیم داشت:

$$Q(x) = Py'(x) + 4Eb(a+bx)^3y''(x) + E(a+bx)^4y'''(x) \qquad (۱۸)$$

در این قسمت نیز متغیرهای حالت در ابتدای ستون (در نقطهٔ $x=0$) را با اندیس k و متغیرهای حالت در انتهای ستون (در نقطهٔ $x=L$) را با اندیس $k+1$ نشان داده می شود. چنانچه ضرایب c_1، c_2، c_3 و c_4 بر حسب متغیرهای حالت ابتدایی ستون به دست آیند و در رابطهٔ y جایگزین شوند، به راحتی می‌توان متغیرهای انتهای تیر را به متغیرهای ابتدای تیر ربط داد. قیدهای حاکم بر حل مسئله نیز به صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$\begin{cases}\sum_1^{Ns} L_k = 1 \\ M_s = \sum \frac{(a_k + b_kL_k)^2 + a_k^2}{2} L_k = 1\end{cases} \qquad (۱۹)$$

هنگامی که $b_k = 0$ فرض شود مسئله ساده گردیده و تبدیل به مسئله بهینه سازی ستون با مقطع ثابت می‌شود که در قسمت قبل شرح داده شده است. با چنین تغییرات غیر خطی ممان دوم سطح در واقع فرض شده است که شعاع ژیراسیون سطح به صورت خطی و در نتیجه مقطع ستون به صورت مخروطی تغییر می‌کند.

مسئله بهینه سازی

چنان‌چه ستون ما یک تکه باشد، دیگر مسئله بهینه سازی معنی ندارد. هنگامی که تعداد تکه های ستون افزایش می یابد، به دلیل افزایش متغیرها و ثابت بودن معادلات (که نسبت به متغیرها کمتر هستند)، دیگر نمی توان به صورت صریح و یا با حل عددی متغیرها را از معادلات به دست آورد. در این گونه مسائل بحث بهینه سازی تعریف می شود. هدف، به دست آوردن مقدار بهینه برای همه متغیرها است که با آن مقادیر، تابع هدف مقدار مینیمم و یا ماکزیمم به خود بگیرد. در این تحقیق تابع هدف P بوده که قصد بیشینه کردن آن را داریم. در مسائل کمانش P را نمی توان به صورت تابع صریح از متغیرهای L و r نوشت بنابر این نیاز به حل عددی برای رسیدن به مقدار P مورد نظر داریم. در مسئله بهینه سازی این تحقیق دو قید در کنار تابع هدف وجود دارد. این دو قید یکی واحد بودن جرم بی بعد کل سیستم بوده و دیگری واحد بودن مجموع طول‌های همه تکه‌ها است:

$$\begin{cases}\sum_1^{Ns} L_k = 1 \\ M_s = 1\end{cases} \qquad (۲۰)$$

به عنوان مثال برای یک تیر یک سر در گیر، شرایط مرزی ابتدای تیر که درگیر می باشد، $y = y' = 0$ بوده و برای انتهای تیر که آزاد می باشد، $M_{Ns+1} = Q_{Ns+1} = 0$ خواهد بود. بنابر این برای داشتن جواب غیربدیهی باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$T_{33}T_{44} - T_{34}T_{43} = 0 \qquad (۲۱)$$

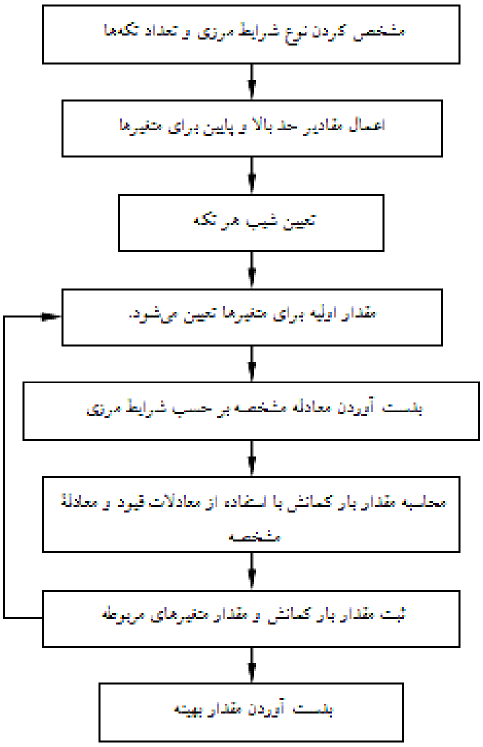
که در آن T_{ij} نشان دهنده درایه موجود در سطر iام و ستون jام ماتریس انتقال T است. معادله مشخصه مربوط به شرایط مرزی مختلف درجدول ۱ آورده شده است.

همان طور که قبلا اشاره شد هدف از الگوریتم بهینه سازی پیدا کردن مقدار بهینه ای برای متغیرها است که تابع هدف مورد نظر بیشینه و یا کمینه شود. در مسئله کمانش، هدف بیشینه نمودن مقدار بار کمانش است. تابع هدف نیز از معادله مشخصه ستون به دست می‌آید و متغیرهای موجود طول و شعاع ژیراسیون هر تکه می‌باشند. تابع هدف در کنار قیدهایی نیز محدود شده است که در متن به قیدهای مورد استفاده اشاره شده است .

جدول ۱- معادله مشخصه برای به دست آوردن بار کمانش بحرانی

انواع	شرط مرزی	معادله مشخصه
گیر- آزاد	$y_1 = y_1' = 0 \text{ and } M_{Ns+1} = Q_{Ns+1} = 0$	$T_{33}T_{44} - T_{34}T_{43} = 0$
گیر- پین	$y_1 = y_1' = 0 \text{ and } y_{Ns+1} = M_{Ns+1} = 0$	$T_{13}T_{34} - T_{14}T_{33} = 0$
گیر- گیر	$Whole\,span:$ $y_1 = y_1' = 0 \text{ and } y_{Ns+1} = y_{Ns+1}' = 0$ $Half\,span:$ $y_1 = y_1' = 0 \text{ and } y_{Ns+1}' = Q_{Ns+1} = 0$	$T_{13}T_{24} - T_{14}T_{23} = 0$ $T_{23}T_{44} - T_{24}T_{43} = 0$
پین- پین	$Whole\,span:$ $y_1 = M_1 = 0 \text{ and } y_{Ns+1} = M_{Ns+1} = 0$ $Half\,span:$ $y_1 = M_1 = 0 \text{ and } y_{Ns+1}' = Q_{Ns+1} = 0$	$T_{12}T_{34} - T_{14}T_{32} = 0$ $T_{22}T_{44} - T_{24}T_{42} = 0$

نحوه عملکرد الگوریتم بدین صورت است که در ابتدا با توجه به شرایط مرزی تعریف شده برای الگوریتم، نوع شرط مرزی مشخص می‌شود. برای حل مسئله بهینه سازی، ابتدا مقدار اولیه‌ای برای متغیرها در نظر گرفته می‌شود که در این الگوریم مقدار اولیه برای همه متغیرها $1/Ns$ برای طول و ۱ برای شعاع های ژیراسیون در نظر گرفته شده است که در آن Ns تعداد تکه‌ها می‌باشد. الگوریتم پس از بررسی مقادیر مختلف از متغیرها، مقدار بهینه آن‌ها را که بار کمانش را بیشینه کند انتخاب می‌کند.



شکل ۲- فلوچارت الگوریتم بهینه سازی بار کمانش

الف) نتایج ستون یک‌تکه با مقطع ثابت

ساده ترین حالت ستون‌های چند تکه حالت یک تکه است. این مسئله ساده ترین نوع مسئله کمانش است که در مقاومت مصالح مقدماتی نیز حل شده است. فرض می‌شود که ستون یک سر در گیر باشد. بنابر این با توجه به جدول ۱ و با استفاده از ماتریس انتقال، معادله مشخصه آن به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\cos(p_1 L_1) = 0 \qquad p_1 = \sqrt{\frac{P}{I_1}} = \frac{\sqrt{P}}{r_1^2} \tag{۲۲}$$

که در آن P نیروی محوری اعمالی و r_1 شعاع ژیراسیون و L_1 طول ستون است. جواب معادله بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{r_1^2}{L_1} \tag{۲۳}$$

P_{cr} بار بحرانی یا کمترین مقدار نیروی کمانش می باشد. با فرض یک تکه بودن ستون و با توجه به شرایط متغیرها، لازم است مقدار بهینه‌ای از شعاع ژیراسیون و طول تکه‌ها طوری به دست آورد که مقدار بار بحرانی حداکثر شود.

جدول ۲- مقدار حداقل بار بحرانی با توجه به نوع شرایط مرزی برای ستون یک تکه

مقدار مرجع بار بحرانی	شرط مرزی	نوع شرط مرزی
$2.4674=(\pi/2)^2$	$y_1=y_1'=0$ and $M_{Ns+1}=Q_{Ns+1}=0$	گیردار–آزاد
$20.1407=(\pi/0.7)^2$	$y_1=y_1'=0$ and $y_{Ns+1}=M_{Ns+1}=0$	گیردار–پین
$39.4784=(2\pi)^2$ $39.4784=(2\pi)^2$	Whole span: $y_1=y_1'=0$ and $y_{Ns+1}=y'_{Ns+1}=0$ Half span: $y_1=y_1'=0$ and $y'_{Ns+1}=Q_{Ns+1}=0$	گیردار–گیردار
$9.8696=(\pi)^2$ $9.8696=(\pi)^2$	Whole span: $y_1=M_1=0$ and $y_{Ns+1}=M_{Ns+1}=0$ Half span: $y_1=M_1=0$ and $y'_{Ns+1}=Q_{Ns+1}=0$	پین–پین

ب) نتایج ستون دوتکه

برای یک ستون یک سر درگیر که دوتکه می‌باشد، معادله مشخصه پس از برخی محاسبات ساده ریاضی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\tan\left(\sqrt{P}\,\frac{L_1}{r_1^2}\right)\tan\left(\sqrt{P}\,\frac{L_2}{r_2^2}\right)\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2=1 \qquad (۲۴)$$

در این معادله چهار متغیر L_1، L_2، r_1 و r_2 وجود دارد. معادله بالا تابع هدف مسئله بهینه سازی است و هدف ما بیشینه کردن مقدار P است.

کانتور بار بحرانی را بر حسب شعاع‌های ژیراسیون r_1 و r_2 نشان می‌دهد. فرض می‌شود که سطح مقطع ستون ها ثابت بوده و نسبت عرض به عمق α ثابتی دارند.

همان طور که از شکل مشاهده می‌شود منطقه بهینه فقط در ربع‌های دوم و چهارم اتفاق می افتد چراکه در ربع‌های اول و سوم مقدار جرم بی بعد، واحد نخواهد شد. مقدار بار بحرانی حداکثر در منطقه دوم به دست می‌آید و مقدار آن ۲/۹۸۱۵ می باشد که افزایش ۲۰/۸۳۶ درصدی نسبت به بار بحرانی ستون یک‌تکه دارد. در جدول ۳ مقادیر بار بحرانی و ابعاد مرتبط برای ستون‌های با تکه‌های بیشتر را آورده شده است. به طور طبیعی، با افزایش تعداد تکه‌ها نیروی کمانش نیز افزایش می‌یابد.

جدول ۳- مقادیر بهینه طول و شعاع ژیراسیون برای ستون چندتکه یکنواخت یک سر درگیر

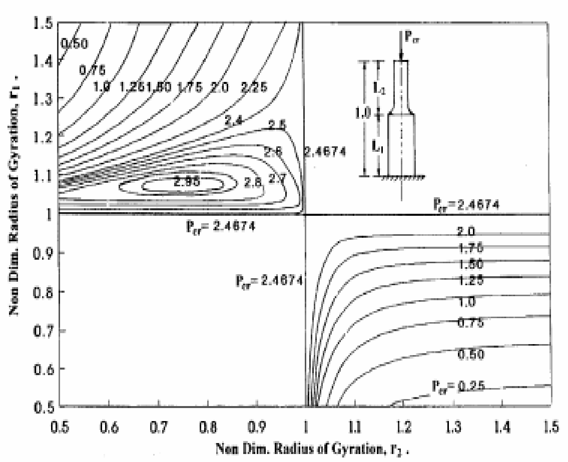
Ns	$(r,L)_k, k=1,2,\ldots,Ns$	$(P_{cr})_{\max}$	Gain(%)
۱	(۱ ،۱)	۲/۴۶۷۴	–
۲	۱–(۱/۰۷۸۲ ،۰/۷۲۴۵) ۲–(۰/۷۵۶۶ ،۰/۲۷۵۵)	۲/۹۸۱۵	۲۰/۸۴
۳	۱–(۱/۰۹۸۳ ،۰/۵۸۴۴) ۲–(۰/۹۶۴۷ ،۰/۲۸۳۴) ۳–(۰/۵۹۱۱ ،۰/۱۳۲۲)	۳/۱۸۴۹	۲۹/۰۸
۴	۱–(۱/۱۱۷۱ ،۰/۵۳۸۹) ۲–(۰/۹۷۰۲ ،۰/۲۲۴۹) ۳–(۰/۹۰۳۶ ،۰/۱۲۳۱) ۴–(۰/۸۳۳۱ ،۰/۱۱۳۱)	۳/۲۳۶۲	۳۱/۱۶

جدول ٤- مقادیر بهینه طول و شعاع ژیراسیون برای ستون دوتکه یکنواخت تحت شرایط مرزی مختلف

شرط مرزی	$(r,L)_k, k=1,2,\ldots,Ns$	$(P_{cr})_{\max}$	Gain(%)
درگیر – آزاد	۱–(۱/۰۷۸۲ ،۰/۷۲۴۵) ۲–(۰/۷۵۶۶ ،۰/۲۷۵۵)	۲/۹۸۱۵	(۲/۴۶۷۴) ۲۰/۸۴
درگیر–پین‌دار	۱–(۱/۰۴۳۲ ،۰/۵۰۰۰) ۲–(۰/۹۵۴۹ ،۰/۵۰۰۰)	۲۰/۷۱۸۳	(۲۰/۱۹۰۷) ۲/۶۱
درگیر–درگیر	۱–(۱/۰۰۰ ،۰/۵۰۰۰) ۲–(۱/۰۰۰ ،۰/۵۰۰۰)	۳۹/۴۷۵۳	(۳۹/۴۷۸۴) ۰/۰۰
پین‌دار–پین‌دار	۱–(۱/۰۰۰ ،۰/۵۰۰۰) ۲–(۱/۰۰۰ ،۰/۵۰۰۰)	۹٫۸۶۹۶	(۹/۸۶۹۶) ۰/۰۰

جدول ۵- مقادیر بهینه طول و شعاع ژیراسیون برای ستون چهارتکه یکنواخت تحت شرایط مرزی مختلف

شرط مرزی	$(r,L)_k, k=1,2,\ldots,Ns$	$(P_{cr})_{\max}$	Gain(%)
درگیر–درگیر	۱–(۱/۰۲۸۷ ،۰/۱۶۵۴) ۲–(۰/۹۳۹۳ ،۰/۳۳۴۶) المان ۳و۴ بترتیب متقارن المان های ۱و۲ می باشند.	۴۰/۰۳۵۸	(۳۹/۴۷۸۴) ۱/۴۲
پین دار–پین‌دار	۱–(۱/۱۳۹۸ ،۰/۲۰۷۱) ۲–(۰/۵۸۵۹ ،۰/۲۹۲۹) المان ۳و۴ بترتیب متقارن المان های ۱و۲ می باشند.	۱۲/۹۰۵۶	(۹/۸۶۹۶) ۳۰/۷۶



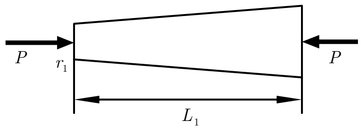
شکل ۳- تغییر بار بحرانی بهینه بر حسب شعاع‌های ژیراسیون برای یک ستون دوتکه و با مقطع توپر

ج) نتایج مقطع متغیر

اگر رابطهٔ $I(x)=(a+bx)^4$ را با $I=r^4$ مقایسه شود، تغییر خطی r نسبت به x کاملا مشهود است. a شعاع ژیراسیون ابتدای تیر و b شیب تغییر مقطع ستون است. هنگامی که $b=0$ باشد، مقطع تیر ثابت بوده و شعاع ژیراسیون ابتدا و انتهای ستون با هم برابر می شود و در واقع مسئله به حالت ساده قبل بر می‌شود. هنگامی که $b>0$ باشد شعاع ژیراسیون انتهای ستون از ابتدای آن بزرگتر بوده و مخروط در جهت طول ستون باز می‌شود. هنگامی‌که $b<0$ باشد شعاع ژیراسیون انتهای تیر نسبت به ابتدای آن کاهش یافته و مخروط در جهت طول تیر بسته می‌شود. در این تحقیق فرض شده است که مقدار b از قبل مشخص و مقدار آن معلوم است. برای ستون‌های چند تکه نیز مقدار b برای هر تکه مشخص می‌باشد. حال فرض کنید که ستون یک تکه بوده و مقدار $b=0.05$ باشد. هم چنین فرض می‌شود که ستون یک سر در گیر است. با این وصف، مقدار بار بحرانی حداکثر $P_{cr}=1.8496$ به دست می‌آید که کاهش ۲۵/۰۴ درصدی نسبت به حالت ستون یکنواخت دارد. طول و شعاع ژیراسیون مربوط به این مسئله به صورت زیر به دست آمده‌اند.

(r_1, L_1)=(۰/۹۷۴۷ ،۱/۰۰)

شکل نمادین این تحلیل در شکل نشان داده شده است.



شکل ٤، نمای ستون با مقطع متغیر

اگر مقدار $b=-0.05$ فرض شود، وهمان مسئلهٔ قبلی دوباره حل گردد، مقدار بار بحرانی $P_{cr}=3.3541$ به دست می‌آید که افزایش ۳۵/۹۳ درصدی نسبت به حالت ستون یکنواخت یک‌تکه دارد. ابعاد متناظر با این مسئله نیز به شرح زیر هستند.

(r_1, L_1)=(۱/۰۲۴۷ ،۱/۰۰)

همان طور که مشاهده می‌شود، هنگامی که مقطع گیردار ستون دارای شعاع ژیراسیون بیشتری باشد، موجب افزایش قابل توجهی در نیروی کمانش می شود. نتایج طول و شعاع ژیراسیون برای شرایط مرزی دیگر در جدول ۶ و جدول ۷ آمده است.

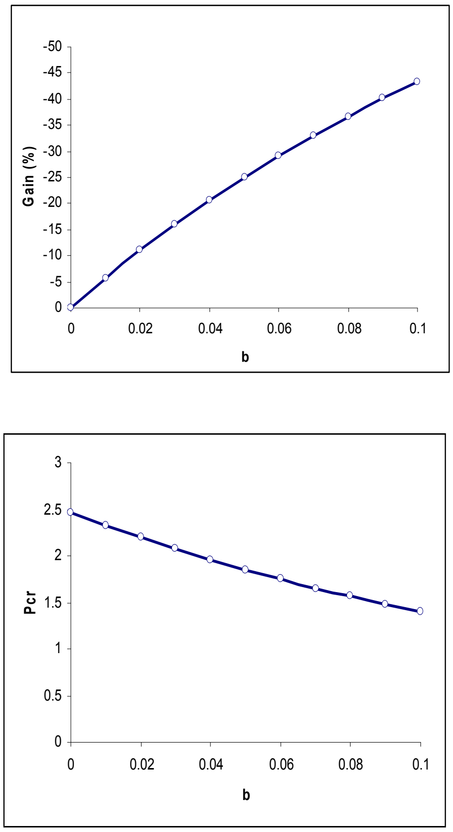
جدول ٦- مقادیر بهینه طول و شعاع ژیراسیون برای ستون یک‌تکه متغیر تحت شرایط مرزی مختلف

شرط مرزی	$(r,L)_1, b=0.05$	$(P_{cr})_{\max}$	$\text{Gain}(\%)$
درگیر- آزاد	(۰/۹۷۴۷ ،۱/۰۰۰)	۱/۸۴۹۶	-۲۵/۰۴ (۲/۴۶۷۴)
درگیر- پین	(۰/۹۷۴۷ ،۱/۰۰۰)	۲۰/۱۱۵۵	-۰/۳۷ (۲۰/۱۹۰۷)
درگیر- درگیر	(۰/۹۷۴۷ ،۱/۰۰۰)	۳۹/۳۸۵۶	-۰/۲۴ (۳۹/۴۷۸۴)
پین- پین	(۰/۹۷۴۷ ،۱/۰۰۰)	۹/۸۴۴۹	-۰/۲۵ (۹/۸۶۹۶)

جدول ۷- مقادیر بهینه طول و شعاع ژیراسیون برای ستون یک‌تکه متغیر تحت شرایط مرزی مختلف

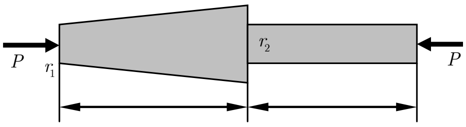
شرط مرزی	$(r,L)_1, b=-0.05$	$(P_{cr})_{\max}$	$\text{Gain}(\%)$
درگیر- آزاد	(۱/۰۲۴۷ ،۱/۰۰۰)	۳/۳۵۴۱	۳۵/۹۳ (۲/۴۶۷۴)
درگیر- پین	(۱/۰۲۴۷ ،۱/۰۰۰)	۲۰/۱۱۵۵	(۲۰/۱۹۰۷) -۰/۳۷
درگیر- درگیر	(۱/۰۲۴۷ ،۱/۰۰۰)	۳۹/۳۸۳۶	(۳۹/۴۷۸۴) -۰/۲۴
پین- پین	(۱/۰۲۴۷ ،۱/۰۰۰)	۹/۸۴۴۹	-۰/۲۵ (۹/۸۶۹۶)

همان طور کـه در جـدول ۷ مـشاهده مـی‌شـود کاهش ۲۵ درصدی در مقدار بار بحرانی بـه وجـود آمـده است. در بقیه موارد به خاطر کم بودن میزان کاهش آنها، می‌توان مقدار صفر را جایگزین آن هـا دانـست. شـکل ۵ نمودار بار بحرانی را بر حسب مقدار شیب نشان می‌دهد.



شکل ۵- تغییرات بار بحرانی و کاهش درصدی آن بر حسب شیب برای ستون یک‌تکه درگیر- آزاد

برای حالت دو تکه نیز بار بحرانی با تغییر مقطع، نسبت به حالت ستون یکنواخت تغییر می‌کند. به عنـوان مثال فرض کنید که قرار است ابعاد یـک سـتون دو تکـه بهینه گردد و تکه اول دارای مقطع متغیر با $b = 0.05$ و مقطع تکه دوم ثابت است این امر به صورت نمـادین در شکل ۶ آورده شده است.

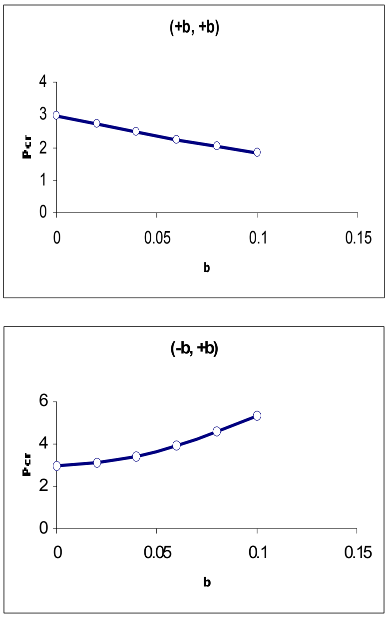


شکل ٦، شماتیک یک ستون دو تکه که تکه اول دارای مقطع متغیر و مقطع تکه دوم ثابت است.

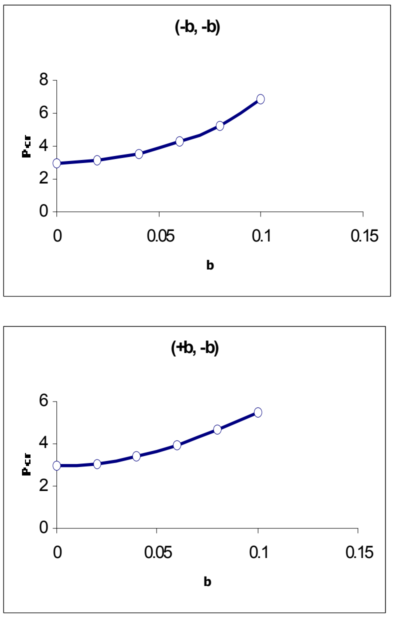
با فرض یک سر درگیر بـودن سـتون مقـدار بـار بحرانی متناسـب بـا ایـن مـسئله $P_{cr} = 2.8245$ بـه دست آمده که افزایش ۱۴/۴۷ درصدی نسبت بـه حالـت ستون یکنواخت یـک تکـه دارد. مقـادیر بهینـۀ r و L برای هر تکه به شرح زیر به دست آمده‌اند.

$(r,L)_k$ =(۱/۰۸۶۰ ،۰/۵۸۲۱) ،(۰/۸۳۹۹ ،۰/۴۱۷۹)

افزایش مقطعی که در وسط سـتون ایجـاد شـده باعـث افـزایش نیـروی کمـانش شـده اسـت. در شـکل تغییرات بار بحرانی بر اساس تغییر شیب مقطع برای یک ستون دو تکه یک سر درگیر نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شـود، بـسته بـه رونـد کاهـشی و یـا افزایشی مقطع تیر (مثبت و یا منفی بودن شیب)، مقـدار بار بحرانی می‌تواند کاهش و یا افزایش یابد



.



شکل ۷ – تغییرات بار بحرانی بر اساس تغییر شیب مقطع برای یک ستون دو تکه یک سر درگیر

همان‌طور که انتظار می‌رفت بـه دلیـل افـزایش مقطع در تکیه‌گاه ستون، بار بحرانی افزایش چشم‌گیـری پیدا کرده است. برای حالت دو تکه مـسائل دیگـری نیـز مطرح می‌شود. چهار نوع مسئله دیگر هنگامی اسـت کـه هر دو تکه دارای مقطع متغیر باشند. نتایج این تحلیل‌هـا به همراه مقدار بار بحرانی آنها با فـرض یـک سـر درگیـر بودن ستون در جدول ۸ آورده شده است.

جدول ۸– مقادیر بار کمانش، طول و شعاع ژیراسیون ستون دو تکه یک سر درگیر و یک سر آزاد با مقطع متغیر

افزایش٪ (۲/۴۶۷۴)	P_{cr}	$(r,L)_k$	شیب مقطع‌ها
-۲/۸۲=۰	۲/۳۹۷	،(۰/۸۷۷ ،۰/۴۹) (۱/۰۸۲،۰/۵۱)	$b_1=+0.05$ $b_2=+0.05$
۴۵/۶۷	۳/۵۹۴	،(۱/۰۲۶ ،۰/۹) (۱/۱۶۰۶ ،۰/۱)	$b_1=-0.05$ $b_2=-0.05$
۴۵/۳۷	۳/۵۸۶	،(۱/۰۲۵ ،۰/۹) (۱/۱۵۴ ،۰/۱)	$b_1=+0.05$ $b_2=-0.05$
۴۳/۶۸	۳/۵۴۵	،(۰/۶۲۹ ،۰/۱) (۱/۰۷۷۶ ،۰/۹)	$b_1=-0.05$ $b_2=+0.05$

جدول ۹ – مقادیر بار کمانش، طول و شعاع ژیراسیون ستون دو تکه درگیر- پین‌دار با مقطع متغیر

افزایش (۲۰/۱۹)	P_{cr}	$(r,L)_k$	شیب مقطع‌ها
۱۰/۵۴	۲۲/۳۱۸	۱-(۰/۷۷۵ ،۰/۱۱) ۲-(۱/۰۰۱ ،۰/۸۹)	$b_1=+0.05$ $b_2=+0.05$
۷/۴۷	۲۱/۶۹۸	۱- (۰/۷۸۰ ،۰/۲۹۲) ۲-(۱/۱۱۷ ،۰/۷۰۸)	$b_1=-0.05$ $b_2=-0.05$
۰/۸۵	۲۰/۳۶۲	۱-(۰/۸۹۹ ،۰/۴) ۲-(۱/۰۷۲ ،۰/۶)	$b_1=+0.05$ $b_2=-0.05$
۲/۶۰	۲۰/۷۱۵	۱-(۱/۱۰۲ ،۰/۱۶۲) ۲-(۰/۹۶ ،۰/۸۳۸)	$b_1=-0.05$ $b_2=+0.05$

جدول ۱۰– مقادیر بار کمانش، طول و شعاع ژیراسیون ستون دو تکه دو سر درگیر با مقطع متغیر

افزایش (۳۹/۴۷)	P_{cr}	$(r,L)_k$	شیب مقطع‌ها
۰/۰	۳۹/۴۷	(۰/۹۸۷،۰/۵) (۰/۹۸۷ ،۰/۵)	$b_1=+0.05, b_2=+0.05$
۰/۰	۳۹/۴۷	(۱/۰۱۲ ،۰/۵) (۱/۰۱۲ ،۰/۵)	$b_1=-0.05, b_2=-0.05$
۰/۰	۳۹/۴۷	(۰/۹۹۹ ،۰/۴۹) (۱/۰۰۱ ،۰/۵۱)	$b_1=+0.05, b_2=-0.05$
۰/۰	۳۹/۴۷	(۱/۰۰۱ ،۰/۵۱) (۰/۹۹۹ ،۰/۴۹)	$b_1=-0.05, b_2=+0.05$

جدول ۱۱– مقادیر بار کمانش، طول و شعاع ژیراسیون ستون دو تکه دو سر پین‌دار با مقطع متغیر

افزایش (۹/۸۶۹۶)	P_{cr}	$(r,L)_k$	شیب مقطع‌ها
۱۴/۵۹	۱۱/۳۰۹۸	(۰/۷۶۵۰ ،۰/۱۴۹) (۱/۰۱۴۰ ،۰/۸۵۰)	$b_1=+0.05$ $b_2=+0.05$
۱۴/۵۹	۱۱/۳۰۹۸	(۱/۰۱۴۰ ،۰/۸۵۱) (۰/۷۶۵ ،۰/۱۴۹۵)	$b_1=-0.05$ $b_2=-0.05$
۱۴/۷۸	۱۱/۳۲۸۵	(۰/۹۸۶۸ ،۰/۴۹۳۳) (۰/۹۶۱ ،۰/۵۱۶۷)	$b_1=+0.05$ $b_2=-0.05$
۱۴/۷۸	۱۱/۳۲۸۵	(۰/۹۶۱ ،۰/۵۱۶۷) (۰/۹۸۶۸ ،۰/۴۹۳)	$b_1=-0.05$ $b_2=+0.05$

برای ستون‌های سه‌تکه هنگامی که مقطع آن ها متغیر باشد، تنوع مسئله زیاد می‌شود. برای یک ستون یک سر درگیر، حالت‌های مختلف ستون سه تکه به همراه نتایج طول، شعاع ژیراسیون و بار بحرانی متناظر با آنها در جدول ۱۲ فهرست شده است.

برای ستون‌های ۴ تکه که تحت شرایط مرزی درگیر- درگیر و یا پین- پین هستند، می‌توان بنا به تقارن (در صورتی که از نظر هندسی نیز متقارن باشد) از نتایج ستون دو تکه استفاده کرد. جدول زیر مقادیر بهینه نصف یک ستون چهار تکه را نشان می‌دهد.

جدول ۱۲- مقادیر بار کمانش، طول و شعاع ژیراسیون ستون سه‌تکه با مقطع متغیر برای حالت درگیر- آزاد

افزایش٪ (۲/۴۶۷۴)	P_{cr}	$(r,L)_k$	شیب مقطع‌ها
۳۴/۲۶	۳/۳۱۲۸	۱-(۱/۳۰۰۰ ،۰/۳۸۶۰) ۲-(۱/۱۲۴۵ ،۰/۴۲۶۱) ۳-(۱/۱۳۳۸ ،۰/۱۸۷۸)	$b_1=+0.05$ $b_2=+0.05$ $b_3=+0.05$
۴۰/۹۹	۳/۴۷۹۰	۱-(۱/۲۴۹۷ ،۰/۱۱۱۳) ۲-(۱/۱۲۸۴ ،۰/۲۳۵۱) ۳-(۰/۹۶۲۵ ،۰/۶۵۳۶)	$b_1=-0.05$ $b_2=-0.05$ $b_3=-0.05$
۳۸/۴۷	۳/۴۱۶۶	۱-(۱/۱۵۴۸ ،۰/۲۹۶۵) ۲-(۱/۰۵۹۷ ،۰/۱۹۰۲) ۳-(۰/۸۹۵۴ ،۰/۵۱۳۳)	$b_1=-0.05$ $b_2=+0.05$ $b_3=-0.05$

نتایج شیب تکه‌های ستون به عنوان متغیر بهینه‌سازی

می‌توان شیب هر تکه را نیز به عنوان متغیر بهینه‌سازی اعمال کرد. در این حالت به برنامه اجازه داده می‌شود بهترین شیب را برای بیشینه کردن مقدار بار بحرانی به دست آورد. در نتیجه متغیرها شامل طول، شیب و شعاع ژیراسیون هر تکه می‌شود. برای حالت یک تکه مقادیر شیب و طول و شعاع ژیراسیون بهینه به صورت زیر به دست می‌آیند

جدول ۱۳- مقادیر بار کمانش، طول و شعاع ژیراسیون ستون ٤ تکه متقارن دو سر درگیر با مقطع متغیر

افزایش (۳۹/۴۷۸۴)	P_{cr}	$(r,L)_k$	شیب مقطع‌ها
۰/۰۰	۳۹/۴۷۸۴	۱-(۰/۹۸۷۴ ،۰/۵۰۰۰) ۲-(۰/۹۸۷۴ ،۰/۵۰۰۰) المان ۳و۴ بترتیب متقارن المان های ۱و۲ می باشند.	$b_1=+0.05$ $b_2=+0.05$ $b_3=-0.05$ $b_4=-0.05$
۰/۰۰	۳۹/۴۷۸۴	۱-(۱/۰۱۲۴ ،۰/۵۰۰۰) ۲-(۱/۰۱۲۴ ،۰/۵۰۰۰) المان ۳و۴ بترتیب متقارن المان های ۱و۲ می باشند.	$b_1=-0.05$ $b_2=-0.05$ $b_3=+0.05$ $b_4=+0.05$
۰/۰۰	۳۹/۴۷۸۴	۱-(۱/۰۰۱۵ ،۰/۵۰۱۸) ۲-(۰/۹۹۸۵ ،۰/۴۹۸۲) المان ۳و۴ بترتیب متقارن المان های ۱و۲ می باشند.	$b_1=+0.05$ $b_2=-0.05$ $b_3=-0.05$ $b_4=+0.05$
۰/۰۰	۳۹/۴۷۸۴	۱-(۰/۹۹۸۵ ،۰/۴۹۸۲) ۲-(۱/۰۰۱۵ ،۰/۵۰۱۸) المان ۳و۴ بترتیب متقارن المان های ۱و۲ می باشند.	$b_1=-0.05$ $b_2=+0.05$ $b_3=+0.05$ $b_4=-0.05$

جدول ١٤- مقادیر بهینه شیب، طول و شعاع ژیراسیون برای ستون یک‌تکه با متغیر تحت شرایط مرزی مختلف

Gain(%)	$(P_{cr})_{\max}$	$(m,r,L)_1$	شرط مرزی
(۲/۴۶۷۴) ۳۲/۱۸	۳/۲۶۱۴	،۱/۳۰۰۰ ،۱/) (-۰/۷۴۳۲	درگیر- آزاد
(۲۰/۱۹۰۷) -۰/۱۳	۲۰/۱۶۴۹	،۱/۰۰۰۱ ،۱/) (-۰/۰۰۰۳	درگیر- پین‌دار
(۳۹/۴۷۸۴) ۰/۰۰	۳۹/۴۷۸۴	،۰/۹۹۹ ،۱/) (+۰/۰۰۰۲	درگیر- درگیر
(۹/۸۶۹۶) ۰/۰۰	۹/۸۶۹۶	،۰/۹۹۹ ،۱/) (+۰/۰۰۰۲	پین‌دار- پین‌دار

درجدول مقادیر بهینهٔ شیب، طول و شعاع ژیراسیون برای یک ستون دو تکه تحت شرایط مرزی مختلف آورده شده است.

جدول ۱۵- مقادیر بهینه شیب، طول و شعاع ژیراسیون برای ستون دوتکه متغیر تحت شرایط مرزی مختلف

شیب مقطع‌ها	$(m,r,L)_k$	P_{cr}	افزایش
درگیر- پین‌دار	۱-(۱/۸۴۲۶-، ۱/۱۲۸۶، ۰/۲۲۸۰) ۲-(۰/۴۶۸۶، ۰/۸۱۹۴، ۰/۷۷۲۰)	۲۷/۹۳۱	(۲۰/۱۹۰۷) ۳۸/۳۳
درگیر- درگیر	۱-(۰/۹۲۲۵، ۰/۷۲۲۴، ۰/۵۰۰۰) ۲-(۰/۹۲۲۵، ۰/۷۲۲۴، ۰/۵۰۰۰)	۳۹/۴۷۸	(۳۹/۴۷۸۴) ۰/۰۰
پین‌دار- پین‌دار	۱-(۲/۲۵۰۹-، ۰/۹۴۱۰، ۰/۲۸۰۵) ۲-(۰/۰۰۳۱-، ۱/۰۹۸۴، ۰/۷۱۹۵)	۱۳/۱۷۲	(۹/۸۶۹۶) ۳۳/۴۵

ه) نتایج حالت‌های خاص

ممکن است در کاربرد به هر دلیلی لازم شود که طول یا شعاع ژیراسیون یکی ار تکه‌ها ثابت باشد. در این حالت باید بقیه متغیرها بهینه شوند. برای مثال یک ستون دوتکه یک سر درگیر مقطع ثابت را در نظر بگیرید که طول تکه اول باید همیشه ثابت و مقدار آن ۰/۲ باشد. الگوریتم استفاده شده در این تحقیق مقادیر زیر را برای طول تکه دوم، شعاع ژیراسیون تکه اول و شعاع ژیراسیون تکه دوم به دست می‌دهد.

$$r_1 = r_2 = 1,\ L_2 = 0.8$$

که همان نتیجه‌ای که انتظار می‌رود را به دست آورده است. در این مورد می‌توان به مثال‌های بیشتری نیز اشاره کرد. در جداول زیر پاره‌ای از این مثال‌ها به همراه حل آن‌ها آورده شده است.

جدول ۱۶- مقادیر بهینه ابعاد مجعول برای ستون دوتکه یکنواخت با قیدهای اضافی

افزایش	P_{cr}	مقادیر بهینه به دست آمده	شرایط مرزی	مقادیر از قبل معلوم
۵/۳۰ (۲/۴۶۷۴)	۲/۵۹۸۲	$r_1 = 1.1162, r_2 = 0.9688, L_2 = 0.8$	درگیر- آزاد	$L_1 = 0.2$
۱/۲۹ (۲۰/۱۹۰۷)	۲۰/۴۵۲۱	$r_1 = 1.0920, r_2 = 0.9757, L_2 = 0.8$	درگیر- پین‌دار	
۰/۰۰ (۳۹/۴۷۸۴)	۳۹/۴۷۸۴	$r_1 = r_2 = 1, L_2 = 0.8$	درگیر- درگیر	
۷/۴۵ (۹/۸۶۹۶)	۱۰/۶۰۴۴	$r_1 = 0.8351, r_2 = 1.0371, L_2 = 0.8$	پین‌دار- پین‌دار	
افزایش	P_{cr}	مقادیر بهینه به دست آمده	شرایط مرزی	مقادیر از قبل معلوم
۲/۵۵ (۲/۴۶۷۴)	۲/۵۳۰۳	$L_1 = 0.2487, L_2 = 0.7513, r_2 = 0.92$	درگیر- آزاد	$r_1 = 1.21$
۰/۶۲ (۲۰/۱۹۰۷)	۲۰/۳۱۵۹	$L_1 = 0.1, L_2 = 0.9, r_2 = 0.9739$	درگیر- پین‌دار	
۰/۰۰ (۳۹/۴۷۸۴)	۳۹/۴۷۸۴	$L_1 = 0.4504, L_2 = 0.5496, r_2 = 0.7872$	درگیر- درگیر	
۰/۰۰ (۹/۸۶۹۶)	۹/۴۱۰۴	$L_1 = 0.1, L_2 = 0.9, r_2 = 0.9739$	پین‌دار- پین‌دار	

جدول ۱۷- مقادیر بهینه ابعاد مجعول برای ستون سه‌تکه یکنواخت با قیدهای اضافی

افزایش	P_{cr}	مقادیر بهینه به دست آمده	شرایط مرزی	مقادیر از قبل معلوم
۱۷/۲۲ (۲/۴۶۷۴)	۲/۸۹۲۳	$r_2 = 1.0915, r_3 = 0.7855, L_1 = 0.1, L_3 = 0.3$	درگیر- آزاد	$r_1 = 1, L_2 = 0.6$
۶/۵۳ (۲۰/۱۹۰۷)	۲۱/۵۰۹۲	$r_2 = 1.0351, r_3 = 0.7555, L_1 = 0.3, L_3 = 0.1$	درگیر- پین‌دار	
۱/۰۹ (۳۹/۴۷۸۴)	۳۹/۹۰۷۶	$r_2 = 0.1, r_3 = 1.1272, L_1 = 0.1640, L_3 = 0.2360$	درگیر- درگیر	
۱۲/۶۱ (۹/۸۶۹۶)	۱۱/۱۱۴۸	$r_2 = 1.0514, r_3 = 0.7318, L_1 = 0.2638, L_3 = 0.1362$	پین‌دار- پین‌دار	
افزایش	P_{cr}	مقادیر بهینه به دست آمده	شرایط مرزی	مقادیر از قبل معلوم
۱۶/۶۹ (۲/۴۶۷۴)	۲/۸۷۹۳	$r_2 = 1.0736, L_1 = 0.1000, L_2 = 0.7092, L_3 = 0.1908$	درگیر- آزاد	$r_1 = 1.01, r_3 = 0.65$
۵/۳۶ (۲۰/۱۹۰۷)	۲۱/۲۷۴۹	$r_2 = 1.0614, L_1 = 0.5274, L_2 = 0.3726, L_3 = 0.1000$	درگیر- پین‌دار	
۰/۰۰ (۳۹/۴۷۸۴)	۳۹/۴۷۸۴	$r_2 = 1.159, L_1 = 0.3779, L_2 = 0.3820, L_3 = 0.2401$	درگیر- درگیر	
۱۱/۱۰ (۹/۸۶۹۶)	۱۰/۹۶۵۴	$r_2 = 1.0466, L_1 = 0.3042, L_2 = 0.5882, L_3 = 0.1076$	پین‌دار- پین‌دار	

و) نتیجه‌گیری

در این تحقیق ستون‌های چندتکه با مقاطع ثابت و متغیر بهینه شده است. متغیرهای بهینه‌سازی طول و شعاع ژیراسیون می‌باشند. تابع هدف، معادله مشخصه کمانش است و ملاک بهینه‌سازی بیشینه کردن نیروی کمانش است. مسائل مختلفی بر اساس نوع شرایط مرزی و تعداد تکه‌ها حل شده است. بر این اساس، برای ستون‌های چندتکهٔ ثابت و متغیر، در حالت شرط مرزی یک سر درگیری، ستون طوری بهینه شده است که مقطع ستون در تکیه‌گاه درگیر دارای شعاع ژیراسیون بیشتری شود. برای شرط مرزی درگیر- پین‌دار نیز هم این نتیجه به دست آمده است. در حالت دو سر درگیر، مقدار بیشینه بار کمانش برای حالتی به دست آمده که مقطع ستون در تکیه‌گاه‌ها شعاع ژیراسیون بیشتری نسبت به وسط ستون داشته باشد. در حالت دو سر پین‌دار شکل بهینه ستون طوری به دست آمده که مقطع ستون در وسط، شعاع ژیراسیون بیشتری نسبت به تکیه‌گاه‌ها داشته باشد. نتایج به دست آمده در این روش برای حالات پین دار- درگیر و پین دار- پین دار در مقایسه با نتایج مالوی **[4]** در جدول ۱۸ آمده است.

جدول ۱۸- مقایسه نتایج

شرایط مرزی	نتایج بهینه بار کمانش به دست آمده	نتایج بهینه بار کمانش [4]	افزایش
پین دار- درگیر	٪۳۸,۳۳	٪۲,۶۱	۳۵,۷۲
پین دار- پین دار	٪۳۳,۴۵	٪۹,۸۶	۲۳,۵۸

مراجع

[1] Hornbuckle, J.C., Boykin, W.H., 1978. Equivalence of a constrained minimum weight and maximum column buckling load problem with solution. Journal of Applied Mechanics, ASME 45, 159–164.

[2] Turner, H.K., Plaut, R.H., 1980. Optimal design for stability under multiple loads. Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings ASCE 106, 1365–1382.

[3] Goh, G.J., Wang, C.M., Teo, K.L., 1991. Unified approach to structural optimization II: variable segment boundaries and variable interior point constraints. Journal of Structural Optimization 3, 133–140.

[4] K.Y. Maalawi, Buckling optimization of flexible columns, Int. J. Solids Structures 39 (2002) 5865–5876.